

FATORAÇÃO QR DE UMA MATRIZ

TEOREMA: Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz com colunas LI. Então existem matrizes Q e R tais que $A = QR$, onde

1. $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ com colunas ortonormais (isto é, as colunas de Q formam uma base ortonormal do subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas colunas de A),
2. $R \in M_n(\mathbb{R})$, $R = (r_{ij})$ é uma matriz triangular superior (isto é $r_{ij} = 0$ se $i > j$) e $r_{ii} > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração: Seja $A = (a_{ij})$ e para cada $j = 1, \dots, n$, seja v_j a j -ésima coluna de A , isto é

$$v_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \text{ e } A = [v_1 v_2 \dots v_n].$$

Aplique o Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt aos vetores $v_j \in \mathbb{R}^m$ (considerando $\mathbb{R}^m$ com o produto interno usual) para obter vetores $u_j, j = 1, \dots, n$ onde

$$u_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i.$$

Seja $e_j = \frac{1}{\|u_j\|} u_j$, de modo que $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ é um conjunto ortonormal. Observe que

$$v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_j, e_i \rangle e_i + \|u_j\| e_j.$$

Para $1 \leq i, j \leq n$ seja $r_{ij} = \langle v_j, e_i \rangle$ para $i = 1, \dots, j-1$, $r_{jj} = \|u_j\|$ e $r_{ij} = 0$ se $i > j$. Então a matriz $R = (r_{ij})$ é triangular superior e os elementos de sua diagonal são números reais > 0 . Com essa notação,

$$v_j = \sum_{i=1}^n r_{ij} e_i. \quad (*)$$

Seja r_j a j -ésima coluna de R e seja Q a matriz cujas colunas são os vetores e_j , isto é, $Q = [e_1 e_2 \dots e_n]$. Então, é claro, as colunas de Q são ortonormais. De $(*)$ temos que $v_j = Q r_j$. Logo

$$A = [v_1 v_2 \dots v_n] = [Q r_1 Q r_2 \dots Q r_n] = QR.$$

Observação 1: A fatoração QR de uma matriz é única. Para a demonstração, veja, por exemplo, o livro *Elementary Linear Algebra* de W.Keith Nicholson.

Observação 2: A fatoração QR é usada em códigos de computador para calcular autovalores de matrizes, resolver sistemas lineares, encontrar aproximações por mínimos quadrados, etc. Muitas vezes deseja-se calcular a inversa de uma matriz P da forma $P = A^t A$. Essa matriz é inversível quando A tem colunas LI. Usando a fatoração QR podemos escrever $P = R^t Q^t Q R$ e $Q^t Q = I_m$ (verifique). Logo $P = R^t R$. Então, o problema se reduz a calcular a inversa da matriz triangular R !

Exercício: Ache a fatoração QR de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$