B

MAT2127- Cálculo Diferencial e Integral II para Química

PROVA SUBSTITUTIVA - 02/12/2011

Nome: ______________________________

Nº USP: ____________________________

Questão	
1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

Instruções:

1 - Preencha o cabeçalho a tinta.
2 - Justifique todas as suas afirmações.
4 - Só serão consideradas as notas de 4 questões.
3 - Boa prova!

1. **(2,5)** Seja $f(x,y) = x^3y + 2y^2 - 4xy$.

   (a) Determine a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém o ponto $(1,2)$ no ponto $(1,2)$.

   (b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,2,2)$.

   (c) Determine a equação do plano tangente ao cilindro $x^2 + z^2 = 5$ no ponto $(1,1,2)$.

   (d) Determine a equação da reta tangente à curva dada pela intersecção do gráfico de f com o cilindro $x^2 + z^2 = 5$ no ponto $(1,2,2)$.

(a) $\nabla f(x,y) = (3x^2y - 4y,\ x^3 + 4y - 4x)$

$\nabla f(1,2) = (6-8,\ 1+8-4) = (-2,5)$

$f(1,2) = 2+8-8 = 2$. Logo C_2 é a curva de nível de f que contém $(1,2)$. A eq. da reta tangente à C_2 em $(1,2)$ é então $\nabla f(1,2)\cdot(x-1, y-2) = 0$, ou

$(-2,5)(x-1,y-2) = -2x+2+5y-10 = 0$

$\boxed{-2x+5y-8=0}$

(b) O vetor $\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2), -1\right)$ é normal ao G_f em $(1,2,f(1,2)) = (1,2,2)$. Logo a eq. do plano tangente ao G_f em $(1,2,f(1,2))$ é

$\vec{N}\cdot(x-1, y-2, z-2) = 0 \Rightarrow (-2,5,-1).(x-1,y-2,z-2)=0$

$\Rightarrow -2x+2+5y-10-z+2=0$

$\boxed{-2x+5y-z-6=0}$

(c) O cilindro $x^2+z^2=5$ é $S_5 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=5\}$

$(1,2,2)\in S_5$ $\nabla g(1,2,2) = (2,0,4)$ é normal $g(x,y,z)$ a S_5 em $(1,2,2)$. Logo, a eq. do plano tangente é

$2(x-1)+4(z-2)=0 \Rightarrow \boxed{2x+4z-10=0}$

(d) A reta tangente à intersecção de G_f e S_5 em $(1,2,2)$ é a intersecção dos planos obtidos em (b) e (c).

Seu vetor diretor é

$$(-2,5,-1) \times (1,0,2) =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}.$$

A equação vetorial da reta é

$$(x,y,z) = (1,2,2) + \lambda(10,3,-5),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

3. **(2,5)** Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x,y)$ uma função de classe C^2.

   (a) Seja $g(u,v) = f(\underbrace{u^2 - v^2}_{x}, \underbrace{2uv}_{y})$ com $u^2 + v^2 = \cancel{1}\ \frac{1}{4}$. Verifique que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v^2, 2uv)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v^2, 2uv)\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)^2.$$

   (b) Determine $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)$ em termos das derivadas parciais de f.

(a) Pela Regra da Cadeia temos que $x = u^2 - v^2$ $y = 2uv$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, 2u + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot 2v$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(-2v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, 2u$$

Logo $\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)^2 =$

$$4u^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \cancel{8uv\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 4v^2$$

$$+\ 4v^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 - \cancel{8uv\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 4u^2$$

$$= 4\underbrace{(u^2+v^2)}_{1/4}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2\right]$$

(b) $$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 2u\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2v\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Logo $$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2u\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\, 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\, 2v\right]$$

$$+\ 2v\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\, 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\, 2v\right]$$

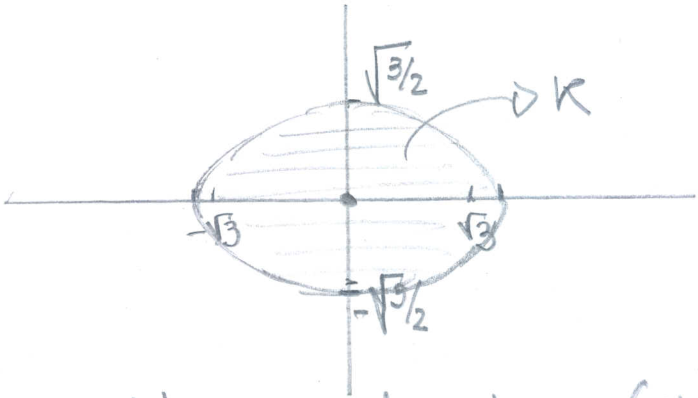
$$= 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 4u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 8uv\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + 4v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

$f \in C^2$
$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

2. **(2,5)** Seja $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^4}{2}$ Ache os pontos de máximo e de mínimo de f na região

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 3\}.$$

Esboce a região K.
Resolva o problema com atenção! Cuidado para não dividir por 0 e aí perder soluções!



Os candidatos a pontos de máximo e mínimo de f em K são:

(i) pontos críticos de f no interior de K

(ii) pontos de máximo e de mínimo de f na fronteira de K.

(i) · $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y^3$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ e $2y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$

$(0,0)$ é o único ponto crítico de f no interior de K.

(ii) A fronteira de K é a elipse $\underbrace{x^2+2y^2}_{g(x,y)} = 3$.

Podemos usar o método dos multiplicadores de Lagrange. Os ptos de máximo e mínimo de f na $fr(K)$ estão entre os pontos que satisfazem, $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow (x^2, 2y^3) = \lambda(x, 2y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x^2 & 2y^3 \\ x & 2y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x^2y - 2xy^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2xy\,(x - y^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 0,\ y = 0 \text{ ou } y^2 = x}$$

$x = 0 \Rightarrow 2y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3/2}$

$y = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$x = y^2 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$x > 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm 4}{2}$

$\Rightarrow x = 1$ ou $\boxed{\cancel{x = -3}}$

NÃO serve (pois $x = y^2, \Rightarrow x \geq 0$)

$x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

$(1, \pm 1)$

candidato (x_0, y_0)	$f(x_0, y_0)$
$(0,0)$	0
$(1,1)$	$1/3 + 1/2 = \dfrac{2+3}{6} = \dfrac{5}{6}$
$(1,-1)$	$1/3 + 1/2 = \dfrac{2+3}{6} = \dfrac{5}{6}$
$(0, \pm\sqrt{3/2})$	$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{4} = \dfrac{9}{8} \approx 1,1$
$(\sqrt{3}, 0)$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \approx 1,7$ MÁXIMO
$(-\sqrt{3}, 0)$	$-\dfrac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = -\sqrt{3} \approx -1,7$ MÍNIMO

B

4. **(2,5)**

(a) Resolva o seguinte problema de valor inicial :

$$(2+x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 2x + x^3, y(0) = 2$$

(b) Ache o valor de k para que a equação diferencial abaixo seja exata e encontre a solução geral para esse k.

$$(6xy^3 + \cos y)dx + (kx^2y^2 - x\operatorname{sen} y)dy = 0$$

(a) A equação

$$(2+x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 2x + x^3 \quad \text{é linear}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + \underbrace{\frac{x}{x^2+2}}_{P(x)} y = \frac{x\cancel{(2+x^2)}}{\cancel{2+x^2}}$$

Um fator integrante é $I(x) = e^{\int P(x)dx}$

$$\int P(x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\underbrace{x^2+2}_{u}} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + k = \ln\sqrt{x^2+2} + k.$$

Logo $I(x) = e^{\ln\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{x^2+2}$.

Assim, multiplicando por $I(x)$ temos

$$\sqrt{x^2+2}\frac{dy}{dx} + \frac{x\sqrt{x^2+2}}{x^2+2}y = x\sqrt{x^2+2}$$

$$\left(\sqrt{x^2+2}\; y\right)' = x\sqrt{x^2+2}$$

Logo $\sqrt{x^2+2}\,y = \frac{1}{2}\int 2x\underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{u}\,dx$

Logo $\sqrt{x^2+2}\,y = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3}(x^2+2)^{3/2} + C$

Então a solução geral é

$$y = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\left(\sqrt{x^2+2}\right)^3 + \frac{C}{\sqrt{x^2+2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$x = 0 \Rightarrow y = 2$

$$2 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{C}{\sqrt{2}}$$

$$6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3C$$

$$C = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Logo $y = \frac{1}{3}\left[(x^2+2) + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2}}\right]$

é a ~~sol~~ do problema de valor inicial.

(b) $\underbrace{(6xy^3+\cos y)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(kx^2y^2 - x\,\text{sen}\,y)}_{N(x,y)}dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 18xy^2 - \text{sen}\,y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2kxy^2 - \text{sen}\,y$$

Para que a equação fique exata queremos que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$. Logo $\boxed{k=9}$

Queremos uma função $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

$$F(x,y) = \int (6xy^3 + \cos y)\,dx = 3x^2y^3 + x\cos y + g(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N \Rightarrow 9x^2y^2 - x\,\text{sen}\,y + g'(y) = 9x^2y^2 - x\,\text{sen}\,y$$

Logo $g'(y) = 0 \Rightarrow g =$ constante.

Então a solução geral da equação é

$$\boxed{3x^2y^3 + x\cos y = C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

B

5. **(2,5)** Determine se as séries abaixo convergem ou divergem. Em cada caso, **justifique a sua resposta**. Enuncie o critério de convergência que você usou e deixe os cálculos dos limites escritos na sua prova.**Se você escrever apenas "converge" ou "diverge", sem explicação, a nota na questão será zero, mesmo que a resposta esteja correta.**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{8^n}{9^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+1}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{9n+7}$

(a) Critério da Razão

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^2 \frac{8^{n+1}}{9^{n+1}} \cdot \frac{9^n}{8^n n^2} = \quad \nearrow 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{9} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{8}{9} < 1$$

Logo a série converge.

(b) $\frac{n}{\sqrt{n^5}} = \frac{1}{n^{3/2}}$. Como $3/2 > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{3/2}$ converge.

Critério de Comparação no Limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n/\sqrt{n^5+1}}{1/n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{n}}{\cancel{\sqrt[5]{n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1/n^5}}}{\cancel{1/n^{3/2}}} = 1.$$

Logo a série $\sum_{n=1}^{\infty} n/\sqrt{n^5+1}$ também converge.

(c) A série diverge pois

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{9n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\,(1+\cancel{3/n})}{9\,(1+\cancel{7/n})} = \frac{5}{9} \neq 0$$