A

MAT2127- Cálculo Diferencial e Integral II para Química

PROVA SUBSTITUTIVA - 02/12/2011

Nome: ____________________

Nº USP: ____________________

Questão	
1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

Instruções:

1 - Preencha o cabeçalho a tinta.
2 - Justifique todas as suas afirmações.
4 - Só serão consideradas as notas de 4 questões.
3 - Boa prova!

1. **(2,5)** Seja $f(x,y) = xy^3 + 2x^2 - 4xy$.

   (a) Determine a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém o ponto $(2,1)$ no ponto $(2,1)$.

   (b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,1,2)$.

   (c) Determine a equação do plano tangente ao cilindro $y^2 + z^2 = 5$ no ponto $(2,1,2)$.

   (d) Determine a equação da reta tangente à curva dada pela intersecção do gráfico de f com o cilindro $x^2 + z^2 = 5$ no ponto $(2,1,2)$.

(a) $\nabla f(x,y) = (y^3 + 4x - 4y,\ 3xy^2 - 4x)$

$\nabla f(2,1) = (1 + 8 - 4,\ 6 - 8) = (5,-2)$

A equação da reta tangente à C_2 é então

$\nabla f(2,1) \cdot (x-2, y-1) = 0 \Rightarrow (5,-2)\cdot(x-2,y-1) = 0$

$\Rightarrow 5(x-2) - 2(y-1) = 0 \Rightarrow \boxed{5x - 2y - 8 = 0}$

$\left(C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = f(2,1) = 2\} \right)$

(b) O vetor normal ao G_f em $(2,1,2)$ é

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1), \frac{\partial f}{\partial y}(2,1), -1 \right) = (5,-2,-1)$

Logo, a equação do plano tangente é

$(5,-2,-1)\cdot(x-2, y-1, z-2) = 0 = 5(x-2) - 2(y-1) - 1(z-2) = 0$

$-10 + 2 + 2$

$\Rightarrow \boxed{5x - 2y - z - 6 = 0}$

(c) O cilindro é a superfície de nível no nível 5 de $g(x,y,z) = y^2 + z^2$. $\nabla g(2,1,2)$ é ortogonal ao cilindro em $(2,1,2)$.

Logo, a equação do plano é $(0,2,4)\cdot(x-2, y-1, z-2) = 0$

$\Rightarrow 2(y-1) + 4(z-2) = 0 \Rightarrow \boxed{y + 2z - 5 = 0}$

(d)

A equação da reta ~~paralela~~ à intersecção das duas superfícies é a intersecção dos planos obtidos em (b) e (c).

O vetor diretor dessa reta é:

$$(5,-2,-1)\times(0,1,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\vec{i} - 10\vec{j} + 5\vec{k}$$

Logo, a equação da reta é

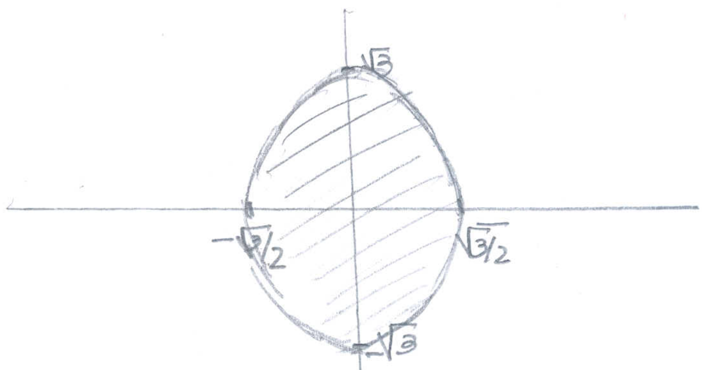
$$(x,y,z) = \lambda(-3,-10,5),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

2. **(2,5)** Seja $f(x,y) = \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{y^3}{3}$ Ache os pontos de máximo e de mínimo de f na região

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Esboce a região K.
Resolva o problema com atenção! Cuidado para não dividir por 0 e aí perder soluções!

K



Os candidatos a pontos de máximo e mínimo de f em K são:

(a) pontos críticos de f no interior de K

(b) pontos de máx e mín de f na fronteira de K.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x^3 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2$

$2x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad y^2 = 0 \Rightarrow y = 0.$

O único pto crítico de f no interior de K é $(0,0)$.

(b) $\text{fr}\, K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 3\}$

Observe que $x^2 = \dfrac{3 - y^2}{2}$

A função f restrita à fronteira de K é

$g(y) = \dfrac{1}{8}(3 - y^2)^2 + \dfrac{y^3}{3} \qquad y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$

Assim $y = -\sqrt{3}$ e $y = \sqrt{3}$ são candidatos a pontos de máximo e mínimo de g; também os pontos críticos de g em $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

$g'(y) = \dfrac{\cancel{2}(3 - y^2)\cdot(-\cancel{2}y)}{8} + y^2$

$= -\frac{3}{2}y + \frac{y^3}{2} + y^2 = \frac{y}{2}\left[y^2 + 2y - 3\right]$

Os pontos críticos de g no intervalo $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$ são $y = 0$ e $y = 1$.

Temos então os pontos:

$y = \pm\sqrt{3} \Longrightarrow x = 0 \qquad (0, \pm\sqrt{3})$

$y = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3/2} \qquad (\pm\sqrt{3/2}, 0)$

$y = 1 \Longrightarrow x = \pm 1 \qquad (\pm 1, 1)$

candidato (x_0, y_0)	$f(x_0, y_0)$	
$(0, 0)$	0	
$(0, \sqrt{3})$	$3\sqrt{3}/3 = \sqrt{3}$	MÁXIMO
$(0, -\sqrt{3})$	$-3\sqrt{3}/3 = -\sqrt{3}$	MÍNIMO
$(1, 1)$	$5/6$	
$(-1, 1)$	$5/6$	
$(\sqrt{3/2}, 0)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{8}$	
$(-\sqrt{3/2}, 0)$	$9/8$	

A

3. **(2,5)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f = f(x, y)$ uma função de classe C^2.

(a) Seja $g(u, v) = f(2uv, u^2 - v^2)$ com $u^2 + v^2 = \cancel{4}\ 1$. Verifique que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(2uv, u^2 - v^2)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(2uv, u^2 - v^2)\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)\right)^2.$$

(b) Determine $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v)$ em termos das derivadas parciais de f.

ANÁLOGO ao da prova B.

A

4. **(2,5)**

(a) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$(3+x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 3x + x^3, y(0) = 3$$

(b) Ache o valor de k para que a equação diferencial abaixo seja exata e encontre a solução geral para esse k.

$$(2x^2y^2 + \operatorname{sen} y)dx + (kx^3y + x\cos y)dy = 0$$

(a) A equação $(3+x^2)\,dy/dx + xy = 3x + x^3$ é Linear

$$\frac{dy}{dx} + \underbrace{\frac{x}{x^2+3}}_{P(x)} y = \frac{x\cancel{(x^2+3)}}{\cancel{x^2+3}}$$

$I(x) = e^{\int P(x)dx}$ é um fator integrante

$$\int P(x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + K$$

$$= \ln\sqrt{x^2+3} + K$$

Assim $I(x) = e^{\ln\sqrt{x^2+3}} = \sqrt{x^2+3}$ é um fator integrante

Moltiplicando a equação por $\sqrt{x^2+3}$ temos

$$\sqrt{x^2+3}\frac{dy}{dx} + \frac{x\sqrt{x^2+x}}{x^2+3}y = x\sqrt{x^2+3}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2+3}\, y\right)' = x\sqrt{x^2+3}$$

Logo $\sqrt{x^2+3}\,y = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{\underbrace{x^2+3}_{u}}\,dx$

Logo $\sqrt{x^2+3}\,y = \frac{1}{2}\frac{(x^2+3)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}(x^2+3)^{3/2} + C.$

Assim $y = \frac{1}{3}(x^2+3) + \frac{C}{\sqrt{x^2+3}}$, $C \in \mathbb{R}$.

Queremos a solução com $y(0) = 3$

$3 = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3} + \frac{C}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{C = 2\sqrt{3}}$

$y = \frac{1}{3}(x^2+3) + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}}$ é a sol. do problema de valor inicial

(b) $\underbrace{(2x^2y^2+\operatorname{sen} y)}_{M}dx + (\underbrace{kx^3y + x\cos y}_{N})dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 4x^2y + \cos y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 3kx^2y + \cos y$$

Para ser exata, $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x \Rightarrow 4 = 3k \Rightarrow \boxed{k = \frac{4}{3}}$

Queremos $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

Logo $F(x,y) = \int (2x^2y^2 + \operatorname{sen} y)\,dx$

$$= \frac{2x^3}{3}y^2 + x \operatorname{sen} y + h(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{4}{3}x^3y + x\cos y + h'(y) = N = \frac{4}{3}x^3y + x\cos y$$

Logo $h'(y) = 0 \Rightarrow h(y)$ é constante.

Assim, a solução geral é

$$\boxed{\frac{2}{3}x^3y^2 + x \operatorname{sen} y = C,\ C \in \mathbb{R}}$$

A

5. **(2,5)** Determine se as séries abaixo convergem ou divergem. Em cada caso, **justifique a sua resposta**. Enuncie o critério de convergência que você usou e deixe os cálculos dos limites escritos na sua prova. **Se você escrever apenas "converge" ou "diverge", sem explicação, a nota na questão será zero, mesmo que a resposta esteja correta.**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n^2 8^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n+5}{3n+2}$

(a) Critério da Razão

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9^{n+1}}{(n+1)^2\, 8^{n+1}} \cdot \frac{n^2 8^n}{9^n} = \lim_{n\to\infty} \Big(\overbrace{\frac{n}{n+1}}^{\to 1}\Big)^2 \frac{9}{8} \to \frac{9}{8} > 1.$$

Logo a série diverge.

(b) $\frac{n}{\sqrt{n^3}} = \frac{n}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{1/2}}$.

Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge $(1/2 < 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}}{1/\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{n}{\sqrt{n^3}}}}{\cancel{1/\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2/n^3}} = 1.$$

Logo, pelo Critério de Comparação no limite, a série diverge.

(c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{9n+5}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{9(1+\overbrace{5/n}^{\to 0})}{3(1+\underbrace{2/n}_{\to 0})} = \frac{9}{3} \neq 0.$$

Logo a série diverge.