B

# MAT2127- Cálculo Diferencial e Integral II para Química

3ª prova - 25/11/2011

Nome: ______________________________

Nº USP: ____________________________

| Questão | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| Nota | |

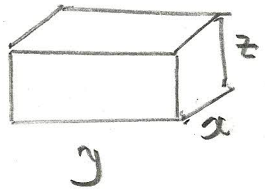
**Instruções:**

1 - Preencha o cabeçalho a tinta.
2 - Justifique todas as suas afirmações.
3 - Boa prova!

1. **(1,5)** Encontre os pontos no hiperboloide $x^2 - y^2 + 2z^2 = -10$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $x - 2y - z = 1$.

O hiperboloide $x^2 - y^2 + 2z^2 = -10$ é a superfície de nível, no nível $-10$ de
$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2.$$
Se $(x_0,y_0,z_0)$ está no hiperboloide, $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ é ortogonal ao hiperboloide em $(x_0,y_0,z_0)$.
Assim, queremos $(x_0,y_0,z_0)$ com $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \parallel (1,-2,-1)$.
$(2x_0, -2y_0, +4z_0) = (\lambda, -2\lambda, -\lambda)$.
$2x_0 = \lambda \Rightarrow x_0 = \lambda/2$, $-2y_0 = -2\lambda \Rightarrow y_0 = \lambda$ e
$+4z_0 = -\lambda \Rightarrow z_0 = -\lambda/4$
Logo $\frac{\lambda^2}{4} - \lambda^2 + \frac{2\lambda^2}{16} = -10 \Rightarrow -5\lambda^2 = -80 \Rightarrow \lambda^2 = 16 \Rightarrow \lambda = \pm 4$.
Os pontos são: $(2,4,-1)$ e $(-2,-4,1)$.

2. **(2,0)** O material para a base de uma caixa retangular sem tampa custa 3 reais por $m^2$ e o material para construir os lados custa 1 real por $m^2$. Quais são as dimensões da caixa com volume máximo cujo custo é 2 reais? (**Admita que o problema tem solução!**)




$x>0,\ y>0,\ z>0$
$C(x,y,z) = 3.xy + 2xz + 2yz$
Queremos $V(x,y,z) = xyz$ máximo
$C(x,y,z) = 2$.

Admitindo que o problema tem solução, a solução está entre os pontos $(x,y,z)$ com $\nabla V(x,y,z) = \lambda \nabla C(x,y,z)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

$(yz, xz, xy) = \lambda(3y+2z, 3x+2y, 2x+2y)$

$$\left.\begin{array}{l} (yz = 3\lambda y + 2\lambda z)\cdot x \\ (xz = 3\lambda x + 2\lambda z)\cdot y \\ (xy = 2\lambda x + 2\lambda y)\cdot z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} xyz = 3\lambda xy + 2\lambda xz \quad (1) \\ xyz = 3\lambda xy + 2\lambda yz \quad (2) \\ xyz = 2\lambda xz + 2\lambda yz \quad (3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$(1)-(2) \Rightarrow$

$2\lambda z x = 2\lambda z y$

Mas $z \neq 0$ e $\lambda \neq 0$ $\Rightarrow \boxed{x = y}$

$(2)-(3) \Rightarrow 3\cancel{\lambda}\cancel{x}y = 2\cancel{\lambda}\cancel{x}z$

Como $x \neq 0$, $\lambda \neq 0$ $\Rightarrow \boxed{z = \frac{3}{2}y}$

Como $C(x,y,z) = 2$ temos

$3x^2 + \cancel{2}x \cdot \frac{3}{\cancel{2}}x + \cancel{2}x \cdot \frac{3}{\cancel{2}}x = 2$

$\Rightarrow 9x^2 = 2$

$x^2 = 2/9$ $\quad x = \pm \sqrt{2}/3$

Como $x > 0$ $\Rightarrow$ $x = \sqrt{2}/3 = y$

e $z = \sqrt{2}/2$

B

3. **(1,5)** Considere a equação diferencial $(4x+9y^2)\mathrm{d}x + (6xy)\mathrm{d}y = 0$.

   (a) Verifique que a equação **não** é exata. Mostre que a função $\mu(x,y) = x^2$ é um fator integrante para ela.

   (b) Ache a solução geral da equação diferencial.

$M(x,y) = 4x+9y^2$ $\quad \partial M/\partial y\,(x,y) = 18y$

$N(x,y) = 6xy$ $\quad \partial N/\partial x\,(x,y) = 6y$ $\quad \} \therefore$ não é exata.

(a) Multiplicando por $x^2$:

$(*)$ $\underbrace{(4x^3+9x^2y^2)}_{A(x,y)}dx + \underbrace{(6x^3y)}_{B(x,y)}dy = 0$ $\quad \frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = 18x^2y$

$\frac{\partial B}{\partial x}(x,y) = 18x^2y$

$(*)$ é exata e então $x^2$ é um fator integrante.

(b) Queremos $F(x,y)$ com $\frac{\partial F}{\partial x} = A$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = B$.

$F(x,y) = x^4 + 3x^3y^2 + h(y)$. $\quad \frac{\partial F}{\partial y} = 6x^3y + h'(y) = 6x^3y \Rightarrow h'(y) = 0$ $\therefore h = $ const.

Logo a solução geral é $x^4 + 3x^3y^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$.

4. **(2,0)** Considere a equação diferencial $(x^2+5)\operatorname{sen} y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\cos^2 y$.

   (a) Encontre **todas** as soluções da equação diferencial acima, isto é, as soluções constantes e a solução geral.

   (b) Qual a solução que passa pelo ponto$(1, \frac{\pi}{2})$? Qual é a que passa por $(1, \frac{\pi}{4})$?

(a) Se $y = k\pi + \pi/2$ com $k \in \mathbb{Z}$, então $\cos y = 0$. Logo essas funções constantes são soluções da equação diferencial.

$(x^2+5)\operatorname{sen} y \dfrac{dy}{dx} = 2x\cos^2 y$

$\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos^2 y}dy = \dfrac{2x}{x^2+5}dx \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos^2 y}dy = \int \dfrac{2x}{x^2+5}dx$

$\displaystyle\int \dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 y}dy$ $\quad u = \cos y$, $du = -\operatorname{sen} y\, dy$ $\Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos^2 y}dy = -\int du\, u^{-2} = -\dfrac{u^{-1}}{-1} + K = \dfrac{1}{u} + K$

$= \dfrac{1}{\cos y} + K$

Logo $\boxed{\dfrac{1}{\cos y} = \ln(x^2+5) + C \quad C \in \mathbb{R}}$ solução geral

(b) A solução que passa por $(1, \pi/2)$ é $y = \pi/2$.

Por $(1, \pi/4)$:

$\dfrac{1}{\cos \pi/4} = \ln 6 + C \Rightarrow \boxed{C = \sqrt{2} - \ln 6}$

$\boxed{\dfrac{1}{\cos y} = \ln(x^2+5) + (\sqrt{2} - \ln 6)}$