A

MAT2127- Cálculo Diferencial e Integral II para Química

3ª prova - 25/11/2011

Nome: ______________________________

Nº USP: ______________________________

Questão	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Nota	

Instruções:

1 - Preencha o cabeçalho a tinta.
2 - Justifique todas as suas afirmações.
3 - Boa prova!

1. **(1,5)** Encontre os pontos no hiperboloide $2x^2 - y^2 + z^2 = -10$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $x - 2y - z = 5$.

Queremos os pontos (x, y, z) no hiperboloide com

$$(4x, -2y, 2z) = \lambda (1, -2, -1)$$

$$4x = \lambda \Rightarrow \boxed{x = \lambda/4}$$

$$-2y = -2\lambda \Rightarrow \boxed{y = \lambda}$$

$$2z = -\lambda \Rightarrow \boxed{z = -\lambda/2}$$

$$\therefore 2 \cdot \frac{\lambda^2}{16} - \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{4} = -10 \Rightarrow -5\lambda^2 = -80 \quad \lambda^2 = 16$$

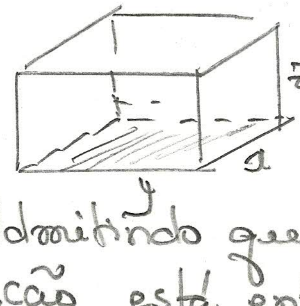
$$\Rightarrow \lambda = \pm 4.$$

Logo, os pontos são: $\boxed{(1, 4, -2), \ (-1, -4, 2).}$

2. **(2,0)** O material para a base de uma caixa retangular sem tampa custa 3 reais por m^2 e o material para construir os lados custa 1 real por m^2. Deseja- se construir uma caixa de volume igual a $12m^3$. Quais são as dimensões da caixa que minimizam o custo? (**Admita que o problema tem solução!**)

$C(x, y, z) = 3xy + 2xz + 2yz$ custo $x > 0, y > 0, z > 0$

$V(x, y, z) = xyz = 12.$



Queremos o mínimo de $C(x, y, z)$ com $xyz = 12$.

Admitindo que o problema tem solução, a solução está entre os pontos (x, y, z) tq $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ com $\nabla C(x, y, z) = \lambda \nabla V(x, y, z)$.

(Método dos Multiplicadores de Lagrange)

Assim:

$$(3y+2z,\ 3x+2z,\ 2x+2y) = \lambda(yz, xz, xy)$$

$$\begin{array}{l} (3y+2z = \lambda yz)\cdot x \\ (3x+2z = \lambda xz)\cdot y \\ (2x+2y = \lambda xy)\cdot z \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$3xy + 2xz = \lambda xyz \quad (1)$$
$$3xy + 2yz = \lambda xyz \quad (2)$$
$$2xz + 2yz = \lambda xyz \quad (3)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2xz = 2yz \underset{z>0}{\Longrightarrow} \boxed{x = y}$$

$$(2) - (3) \Rightarrow 3xy = 2xz \underset{x>0}{\Longrightarrow} 3y = 2z$$

$$\Rightarrow z = \frac{3}{2}y$$

Como $xyz = 12$,

$$x\, x\, \frac{3}{2}x = 12$$

$$3x^3 = 24$$

$$x^3 = 8 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Logo: $\boxed{x = y = 2 \text{ e } z = 3}$

A

3. **(1,5)** Considere a equação diferencial $(6xy)\mathrm{d}x + (4y + 9x^2)\mathrm{d}y = 0$.

   (a) Verifique que a equação **não** é exata. Mostre que a função $\mu(x,y) = y^2$ é um fator integrante para ela.

   (b) Ache a solução geral da equação diferencial.

(a) $M(x,y) = 6xy \quad N(x,y) = 4y + 9x^2$

$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 6x \neq \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 18x$. NÃO é EXATA.

Agora, multiplicando por y^2 temos

$(*) \quad \underbrace{(6xy^3)}_{A(x,y)}dx + \underbrace{(4y^3 + 9x^2y^2)}_{B(x,y)}dy = 0 \qquad \frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = 18xy^2 = \frac{\partial B}{\partial x}(x,y)$

(b) $(*)$ é exata! Queremos $F(x,y)$ com $\partial F/\partial x = A$ e $\partial F/\partial y = B$.

Logo $F(x,y) = 3x^2y^3 + g(y)$ $\qquad g'(y) = 4y^3$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \cancel{9x^2y^2} + g'(y) = \cancel{9x^2y^2} + 4y^3 \Rightarrow \quad g(y) = y^4$.

Logo a sol. geral é: $\boxed{3x^2y^3 + y^4 = C \quad C \in \mathbb{R}}$

4. **(2,0)** Considere a equação diferencial $(x^2 + 10)\cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\mathrm{sen}^2 y$.

   (a) Encontre **todas** as soluções da equação diferencial acima, isto é, as soluções constantes e a solução geral.

   (b) Qual é a solução que passa pelo ponto$(1, 2\pi)$? Qual é a que passa por $(1, \frac{\pi}{3})$?

(a) Se $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ então

$\cos y = 0$ e $\operatorname{sen} y = 0$, logo

$(x^2+10)\cos(k\pi)\underbrace{\frac{d(k\pi)}{dx}}_{0} = 2x\,\underbrace{\operatorname{sen}^2(k\pi)}_{0}$

As soluções constantes são $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Agora, vamos encontrar todas as outras soluções.

A equação é de variáveis separáveis

$\frac{\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}dy = \frac{2x}{x^2+10}dx \Rightarrow \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}dy = \int \frac{2x}{x^2+10}dx$

$\int \frac{\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}dy = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} + k_1 = -\frac{1}{u} + k_1 = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} + k_1$

$u = \operatorname{sen} y$

$du = \cos y\, dy$

$\int \frac{2x}{x^2+10}dx = \ln(x^2+10) + k_2$

Logo a sol. geral é $\boxed{-\frac{1}{\operatorname{sen} y} + \ln(x^2+10) = C}$

(b) Por $(1, 2\pi)$ $\boxed{y = 2\pi}$; por $(1, \pi/3)$ $\quad C = -\frac{1}{\operatorname{sen}\pi/3} + \cancel{\ln 11} = -\frac{2}{\sqrt{3}} + \ln 11$

5. **(2,0)** Determine se as séries abaixo convergem ou divergem. Em cada caso, **justifique a sua resposta**. Enuncie o critério de convergência que você usou e deixe os cáculos dos limites escritos na sua prova.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{10}10^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{4^n+5^n}$

(a) Sei que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n^2)}{1/n^2} = 1.$$

Logo, pelo Critério de Comparação no Limite, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(1/n^2)$ também converge.

(b) Utilizar o Critério da Razão.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{10}\,10^{n+1}} \cdot \frac{n^{10}\,10^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1}\Big)^{10} \underbrace{\frac{(n+1)}{10}}_{\to +\infty} = +\infty.$$

Como o limite é > 1, a série diverge.

(c) Observe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8^n}{4^n+5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8^n}{5^n\left((4/5)^n + 1\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{8}{5}\right)^n}_{\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\left[(4/5)^n + 1\right]}}_{\to 1} = +\infty \neq 0.$$ (pois $4/5 < 1$)

Logo a série diverge.

6. **(1,0)** Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x+2)^{n-1}}.$$

(a) Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a série converge? Qual é a sua soma?

(b) Encontre o valor de x tal que a série converge para 2.

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x+2)^{n-1}} = x + \frac{x}{x+2} + \frac{x}{(x+2)^2} + \cdots$$

é uma série geométrica cujo primeiro termo é x e a razão é $\frac{1}{x+2}$. Logo, ela converge para $\frac{x}{1-\frac{1}{x+2}}$

$= \frac{x(x+2)}{x+1}$ sempre que $\frac{1}{|x+2|} < 1$, ou seja

$|x+2| > 1 \Rightarrow x+2 > 1$ ou $x+2 < -1 \Rightarrow x > -1$ ou $x < -3$

(b) $\frac{x(x+2)}{x+1} = 2 \Rightarrow x^2 + \cancel{2x} = \cancel{2x} + 2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Mas $-\sqrt{2}$ não serve, pois a série não converge nesse ponto. Logo $x = \sqrt{2}$.