MAT2127- Cálculo Diferencial e Integral II para Química

B

1ª prova - 31/08/2011

Nome: ______________________________

Nº USP: ______________________________

Questão	
1	
2	
3	
4	
Nota	

Instruções:

1 - Preencha o cabeçalho a tinta.

2 - Justifique todas as suas afirmações.

3 - Boa prova!

1. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê.

Observação: Se não houver uma justificativa correta, a nota na questão será **ZERO** mesmo que a resposta esteja certa!

(a) **(0,7)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\text{sen}\left(\frac{xy^4}{x^2+y^4}\right)$.

(b) **(0,7)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-2x^3y+y^4}{3x^4+x^2y^2+4y^4}$

(c) **(0,7)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{(x^2+y^2)^2}$

(a) Observe que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\cancel{x}}_{\to 0}\,\underbrace{\frac{\cancel{x}\,y^4}{x^2+y^4}}_{\text{limitada}} = 0$. Logo

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \text{sen}\left(\frac{xy^4}{x^2+y^4}\right) = \text{sen}\,0 = 0$. Portanto

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}_{\text{limitada}}\,\underbrace{\text{sen}\left(\frac{xy^4}{x^2+y^4}\right)}_{\to 0} = 0$

(b) Esse limite não existe pois se $f(x,y) = \dfrac{x^4-2x^3y+y^4}{3x^4+x^2y^2+4y^4}$ e $\gamma_1(t)=(t,0)$, então

$f(\gamma_1(t)) = \dfrac{t^4}{3t^4} = \dfrac{1}{3}\ \forall t\neq 0$. Logo $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \frac{1}{3} = L_1$

Se $\gamma_2(t)=(0,t)$, então $f(\gamma_2(t)) = \dfrac{t^4}{4t^4} = \dfrac{1}{4}\ \forall t\neq 0$.

Portanto $L_2 = \displaystyle\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \frac{1}{4} = L_2$. Como $L_1 \neq L_2$, não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(c) Seja $u = x^2+y^2$. Então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} u = 0$. Assim

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos u - 1}{u^2} \overset{LH}{=} \lim_{u\to 0} \frac{-\overbrace{\text{sen}\,u}^{\to 1}}{2u} = -\frac{1}{2}$

2. **(3,0)** Seja $\gamma(t) = (t^2 - 2t, t^3 - 3t^2)$.

(a) Determine o ponto de auto-intersecção de γ.

(b) Estude o vetor velocidade de γ.

(c) Estude a concavidade de γ.

(d) Calcule os limites necessários e esboce a trajetória de γ mostrando os pontos onde a tangente é vertical e/ou horizontal. Indique o sentido da trajetória.

B

(a) Queremos t_1, t_2 com $t_1 \neq t_2$ e $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$.

Assim: $t_1^2 - 2t_1 = t_2^2 - 2t_2$ (1)

$t_1^3 - 3t_1^2 = t_2^3 - 3t_2^2$ (2)

De (1) temos que $\underbrace{\cancel{(t_1 - t_2)}}_{\neq 0 \text{ (pois } t_1 \neq t_2)}(t_1 + t_2) = 2\underbrace{\cancel{(t_1 - t_2)}}_{\neq 0}$.

Logo $\boxed{t_1 + t_2 = 2}$ (3)

De (2) $\underbrace{\cancel{(t_1 - t_2)}}_{\neq 0}(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) = 3\underbrace{\cancel{(t_1 - t_2)}}_{\neq 0}(t_1 + t_2)$

Logo $\boxed{t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 = 3(t_1 + t_2)}$ (4)

De (4): $t_1^2 + t_2(t_1 + t_2) = 3(t_1 + t_2)$ e substituindo (3)

$t_1^2 + 2t_2 - 6 = 0 \Rightarrow t_1^2 + 2(2 - t_1) - 6 = 0$

Logo $t_1^2 - 2t_1 - 2 = 0$. Logo $t_1 = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$,

$t_1 = 1 \pm \sqrt{3}$. Assim $t_1 = 1 + \sqrt{3}$ e $t_2 = 1 - \sqrt{3}$.

$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = \left((1+\sqrt{3})^2 - 2(1+\sqrt{3}),\ (1+\sqrt{3})^3 - 3(1+\sqrt{3})^2\right)$

$= (1 + \cancel{2\sqrt{3}} + \cancel{3} - 2 - \cancel{2\sqrt{3}},\ 1 + \cancel{3\sqrt{3}} + \cancel{3 \cdot 3} + \cancel{3\sqrt{3}} - 3 - \cancel{6\sqrt{3}} - \cancel{9})$

$(x, y) = (2, -2)$ PONTO DE AUTO-INTERSECÇÃO

(b) $\gamma'(t) = (\overbrace{2t - 2}^{x'},\ \overbrace{3t^2 - 6t}^{y'})$

$(2(t-1),\ 3t(t-2))$

	0		1		2	
x'	−		−	+		+
x	←		←	→		→
y'	+		−	−		+
y	↑		↓	↓		↑
γ'	↖		↙	↘		↗

(c) Se $t \neq 1$

$m(t) = \dfrac{3(t^2 - 2t)}{2(t-1)}$ é coeficiente angular da reta tangente à trajetória de γ em $\gamma(t)$.

A concavidade é dada pelo sinal de $\dfrac{m'(t)}{x'(t)}$. $m'(t) = \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{(2t-2)(t-1) - (t^2 - 2t)}{(t-1)^2}\right]$

$= \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{2t^2 - \cancel{2t} - 2t + 2 - t^2 + \cancel{2t}}{(t-1)^2}\right] = \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{(t-1)^2 + 1}{(t-1)^2}\right] > 0$

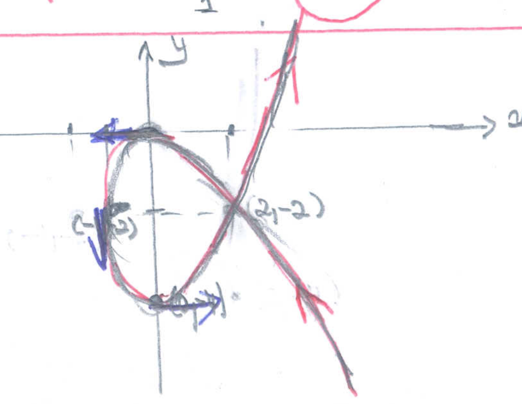
Assim, o sinal de $\dfrac{m'(t)}{x'(t)}$ é

− − − − − − + + + + +

1

(d) $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \gamma(t) = (+\infty, \pm\infty)$

t	$\gamma(t)$	
$1 \pm \sqrt{3}$	$(2, -2)$	→ AUTO-INTERSECÇÃO
0	$(0, 0)$	→ TANGENTE HOR.
1	$(-1, -2)$	→ TANGENTE VERT
2	$(0, -4)$	→ TANGENTE HOR



3. **(3,0)** Seja $f(x,y) = \dfrac{2x^2+5y^2}{x^2+y^2+1}$

B

(a) Esboce as curvas de nível de f nos níveis $k=1, k=2$ e $k=3$.
Observação: Faça um esboço bem feito, diga o que são as curvas de nível.

(b) Encontre uma parametrização para a curva de nível no nível $k=1$. Encontre a reta tangente a essa curva no ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4})$.

(c) Seja $\gamma(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}(e^t - e^{-t}), e^t + e^{-t})$. Mostre que a imagem de γ está contida em uma curva de nível de f. Em qual nível?

(a) $D_f = \mathbb{R}^2$

$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{2x^2+5y^2}{x^2+y^2+1} = 1\}$

$2x^2+5y^2-x^2-y^2 = 1 \Rightarrow$

$x^2+4y^2 = 1$ é uma elipse

$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{2x^2+5y^2}{x^2+y^2+1} = 2\}$

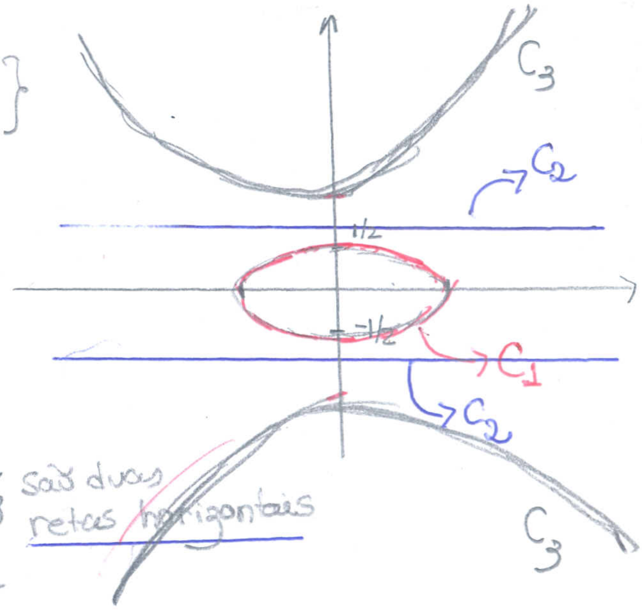
$\Rightarrow 2x^2+5y^2-2x^2-2y^2 = 2$

$\Rightarrow 3y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2/3}$ são duas retas horizontais

$C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{2x^2+5y^2}{x^2+y^2+1} = 3\}$

$2x^2+5y^2-3x^2-3y^2 = 3$

$2y^2 - x^2 = 3$ é uma hipérbole



(b) $C_1: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2 = 1\}$

$x^2 + (2y)^2 = 1$

Podemos escrever $x = \cos t, 2y = \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi[$

$\gamma(t) = (\cos t, \frac{\operatorname{sen} t}{2})$ $t \in [0, 2\pi[$ é uma parametrização para C_1.

Quero $t_0 \in [0, 2\pi[$ tal que $\gamma(t_0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4})$.

Então: $\left.\begin{array}{l}\cos t_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\operatorname{sen} t_0}{2} = \sqrt{2}/4\end{array}\right\} \Rightarrow t_0 = \pi/4$

$\gamma'(t_0) = (-\operatorname{sen} t, \frac{\cos t}{2})$

A eq. da reta tangente é $X = \gamma(t_0) + \lambda\gamma'(t_0)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$X = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}) + \lambda(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4})$.

(c) $f(\gamma(t)) = \dfrac{2\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(e^t-e^{-t})^2 + 5(e^t+e^{-t})^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(e^t-e^{-t})^2 + (e^t+e^{-t})^2+1} =$

$= \dfrac{e^{2t}-2+e^{-2t}+5e^{2t}+10+5e^{-2t}}{\frac{1}{2}e^{2t}-1+\frac{1}{2}e^{-2t}+e^{2t}+2+e^{-2t}+1} = \dfrac{6e^{2t}+6e^{-2t}+8}{\frac{3}{2}e^{2t}+\frac{3}{2}e^{-2t}+2} = 4$

Logo a $\operatorname{Im}\gamma \subset C_4$.

4. **(2,0)** Seja $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$.

(a) Esboce o domínio de f e esboce (no mesmo sistema de coordenadas) as curvas de nível nos níveis $k = 0, k = \sqrt{3}$ e $k = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

(b) Esboce as intersecções do gráfico de f com os planos $x = 0$ e $y = 0$.

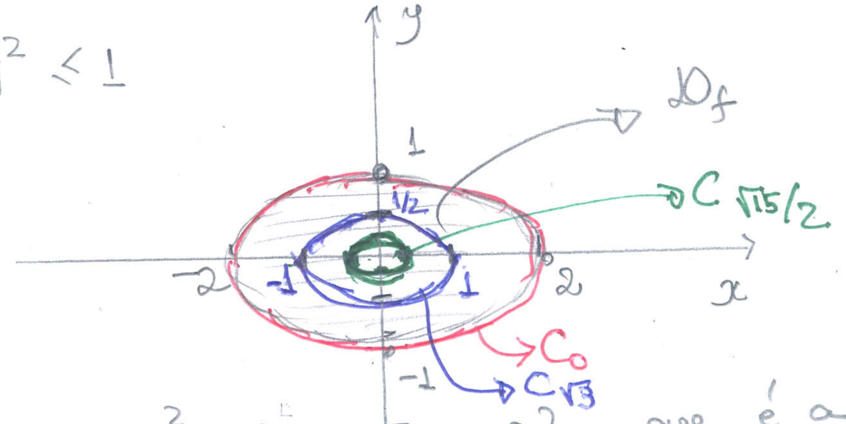
(c) Esboce o gráfico de f. Esse gráfico é uma parte de qual superfície quádrica?

B

(a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 - x^2 - 4y^2 \geq 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\}$

$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$



$C_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{4 - x^2 - 4y^2} = 0\}$, que é a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

$C_{\sqrt{3}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{4 - x^2 - 4y^2} = \sqrt{3}\}$

$4 - x^2 - 4y^2 = 3 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 1$

$C_{\sqrt{15}/2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{4 - x^2 - 4y^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}\}$

$4 - x^2 - 4y^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow$

$x^2 + 4y^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow 16x^2 + 64y^2 = 1$

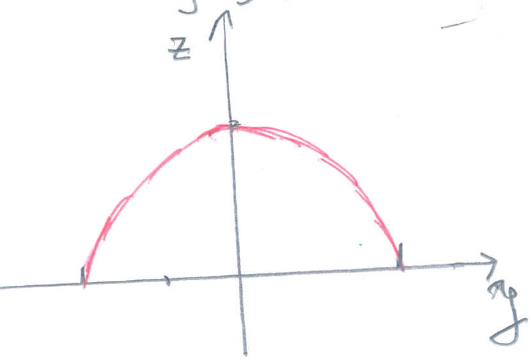
As curvas de nível C_k são elipses.

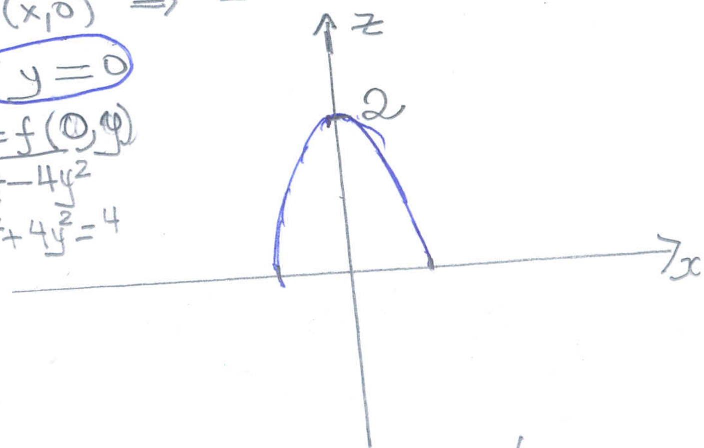
(b) $\boxed{y = 0}$

$f(x,0) = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow z = f(x,0) \Rightarrow z^2 + x^2 = 4$

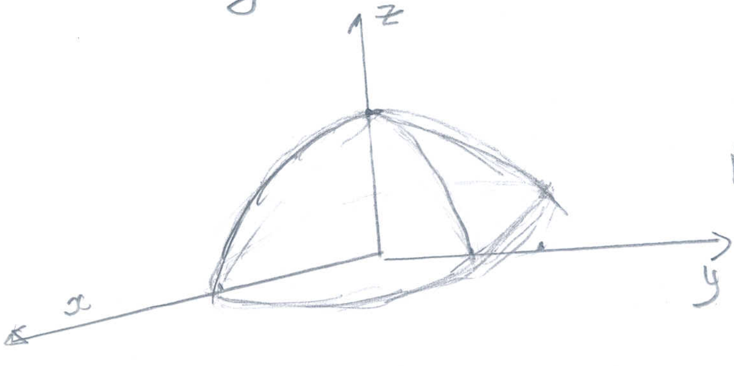
$(y = 0)$

$z = f(0,y)$
$= \sqrt{4 - 4y^2}$
$\Rightarrow z^2 + 4y^2 = 4$





(c)



O gráfico é a parte superior do elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$

ou $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$