MAT2127- Cálculo Diferencial e Integral II para Química

1ª prova - 31/08/2011

A

Nome: ____

Nº USP: ____

Questão	
1	
2	
3	
4	
Nota	

Instruções:

1 - Preencha o cabeçalho a tinta.
2 - Justifique todas as suas afirmações.
3 - Boa prova!

1. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê.

Observação: Se não houver uma justificativa correta, a nota na questão será **ZERO** mesmo que a resposta esteja certa!

(a) **(0,7)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{x^4y}{x^4+y^2}\right)$

(b) **(0,7)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+2xy^3-y^4}{2x^4+x^2y^2+3y^4}$

(c) **(0,7)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\left(\frac{x^4}{x^4+y^2}\right)}^{\text{limitada}} \underbrace{y}_{\to 0} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}\left(\frac{x^4y}{x^4+y^2}\right) = 0.$

Logo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}_{\text{limitada}} \operatorname{sen}\left(\frac{x^4y}{x^4+y^2}\right) = 0$

(b) Seja $f(x,y) = \frac{x^4+2xy^3-y^4}{2x^4+x^2y^2+3y^4}$.

Se $\gamma_1(t) = (t,0)$ então $f(\gamma_1(t)) = \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}\ \forall t \neq 0$.

Logo $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \frac{1}{2} = L_1$

Se $\gamma_2(t) = (0,t)$ então $f(\gamma_2(t)) = -\frac{t^4}{3t^4} = -\frac{1}{3}\ \forall t \neq 0$.

Portanto $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = -\frac{1}{3} = L_2$.

Como $L_1 \neq L_2$, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(c) Seja $u = x^2+y^2$. Então $(x,y) \to (0,0) \Rightarrow u \to 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u^2} \cdot \frac{(1+\cos u)}{(1+\cos u)} =$

$\lim\limits_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2} \cdot \frac{1}{1+\cos u} = \lim\limits_{u\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^2 \underbrace{\frac{1}{1+\cos u}}_{\to \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

2. **(3,0)** Seja $\gamma(t) = (t^3 - 3t^2, t^2 - 2t)$.

(a) Determine o ponto de auto-intersecção de γ.

(b) Estude o vetor velocidade de γ.

(c) Estude a concavidade de γ.

(d) Calcule os limites necessários e esboce a trajetória de γ mostrando os pontos onde a tangente é vertical e/ou horizontal. Indique o sentido da trajetória.

A

(a) Queremos encontrar $t_1 \neq t_2$ com $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$.

$t_1^3 - 3t_1^2 = t_2^3 - 3t_2^2$ (1)

$t_1^2 - 2t_1 = t_2^2 - 2t_2$ (2).

De (1): $t_1^3 - t_2^3 = 3t_1^2 - 3t_2^2 \Longrightarrow$

$\cancel{(t_1 - t_2)}(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) = 3\cancel{(t_1 - t_2)}(t_1 + t_2)$

$\Rightarrow t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 = 3(t_1 + t_2)$

$\Rightarrow t_1^2 + t_2(t_1 + t_2) = 3(t_1 + t_2)$ e usando (3) temos:

$t_1^2 + 2(2 - t_1) = 6 \Longrightarrow t_1^2 - 2t_1 - 2 = 0 \Longrightarrow$

$t_1 = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$.

De (2)

$t_1^2 - t_2^2 = 2(t_1 - t_2)$

$\underbrace{\cancel{(t_1 - t_2)}}_{\neq 0}(t_1 + t_2) = 2\underbrace{\cancel{(t_1 - t_2)}}_{\neq 0}$

$t_1 + t_2 = 2$ (3)

Assim $t_1 = 1 + \sqrt{3}$ e $t_2 = 1 - \sqrt{3}$.

$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = \left((1+\sqrt{3})^3 - 3(1+\sqrt{3})^2, (1+\sqrt{3})^2 - 2(1+\sqrt{3}) \right)$

$= (1 + \cancel{3\sqrt{3}} + \cancel{3\sqrt{3}} + \cancel{3\sqrt{3}} - 3 - \cancel{6\sqrt{3}} - \cancel{3\sqrt{3}}, 1 + \cancel{2\sqrt{3}} + 3 - 2 - \cancel{2\sqrt{3}})$

$= (-2, 2)$ PONTO DE AUTO-INTERSECÇÃO

(b) $\gamma'(t) = (\underbrace{3t^2 - 6t}_{x'}, \underbrace{2t - 2}_{y'})$

	0	1	2	
x'	+	−	−	+
x	→	←	←	→
y'	−	−	+	+
y	↓	↓	↑	↑
γ'	↘	↙	↖	↗

(c) Seja $m(t) = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{2}{3} \dfrac{(t-1)}{t(t-2)}$

$t \neq 0, 2$. A concavidade de γ é dada pelo estudo do sinal de $\dfrac{m'(t)}{x'(t)}$.

$m'(t) = \dfrac{2}{3}\left[\dfrac{t^2 - 2t - (t-1)(2t-2)}{(t^2 - 2t)^2}\right]$

$= \dfrac{2}{3}\left[\dfrac{-t^2 - 2t - 2}{(t^2 - 2t)^2}\right] = \dfrac{-2}{3}\dfrac{[(t+1)^2 + 1]}{(t^2 - 2t)^2} < 0$

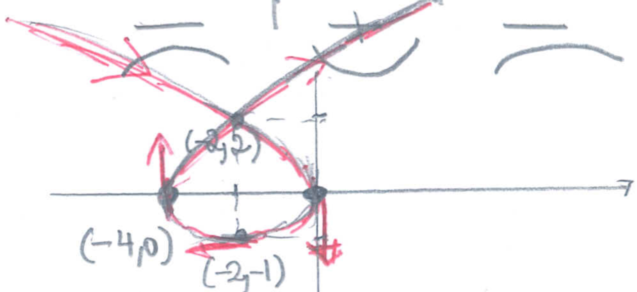
$\forall t \neq 0, 2$

		0		2	
m'	− −		− −		− −
x'	+ + +		− − −		+ + +
	⌒		◡		⌒

(d)

$\lim_{t \to \pm\infty} \gamma(t) = (\pm\infty, +\infty)$

t	$\gamma(t)$
$1 \pm \sqrt{3}$	$(-2, 2)$ auto intersec
0	$(0,0) \to$ tg vert.
1	$(-2,-1) \to$ tg hor.
2	$(-4,0) \to$ tg vert



3. **(3,0)** Seja $f(x,y) = \dfrac{5x^2+2y^2}{x^2+y^2+1}$

A

(a) Esboce as curvas de nível de f nos níveis $k=1, k=2$ e $k=3$.
Observação: Faça um esboço bem feito, diga o que são as curvas de nível.

(b) Encontre uma parametrização para a curva de nível no nível $k=1$. Encontre a reta tangente a essa curva no ponto $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(c) Seja $\gamma(t) = (e^t + e^{-t}, \frac{\sqrt{2}}{2}(e^t - e^{-t}))$. Mostre que a imagem de γ está contida em uma curva de nível de f. Em qual nível?

(a) $D_f = \mathbb{R}^2$ (pois $x^2+y^2+1 \neq 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}$)

$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{5x^2+2y^2}{x^2+y^2+1} = k\}$

Se $k=1$

C_1: $\frac{5x^2+2y^2}{x^2+y^2+1} = 1 \Rightarrow 4x^2+y^2=1$

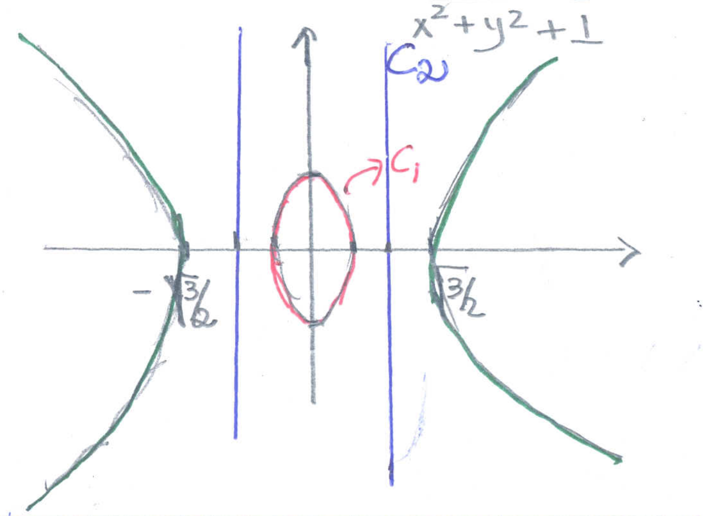
C_1 é uma ELIPSE

C_2: $\frac{5x^2+2y^2}{x^2+y^2+1} = 2 \Rightarrow 3x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2/3}$

C_2 é um par de retas verticais.

C_3: $\frac{5x^2+2y^2}{x^2+y^2+1} = 3 \Rightarrow 2x^2 - y^2 = 3$

C_3 é uma hipérbole.



(b) C_1 é a elipse
$4x^2+y^2=1 \Rightarrow (2x)^2+y^2=1$

Podemos escrever

$2x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi[$

Assim, uma parametrização de C_1 é

$\gamma: [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{2}, \operatorname{sen} t\right)$.

Quero achar t_0 tal que $\gamma(t_0) = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{\cos t_0}{2} = \frac{1}{4}$ e $\operatorname{sen} t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{6}$

Logo a eq. da reta tangente é

$X = \gamma(\pi/6) + \lambda(\gamma'(\pi/6))$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$X = (1/4, \sqrt{3}/2) + \lambda(-\sqrt{3}/4, \frac{1}{2})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(c) Vamos calcular $f(\gamma(t))$.

$$f(\gamma(t)) = \frac{5(e^t+e^{-t})^2 + 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(e^t-e^{-t})\right)^2}{(e^t+e^{-t})^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(e^t-e^{-t})\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{5(e^{2t}+2+e^{-2t}) + e^{2t}-2+e^{-2t}}{e^{2t}+2+e^{-2t}+\frac{1}{2}(e^{2t}-2+e^{-2t})+1} = \frac{6e^{2t}+6e^{-2t}+8}{\frac{3}{2}e^{2t}+\frac{3}{2}e^{-2t}+2} = 4$$

Logo $\operatorname{Im}\gamma \subset C_4$.

4. **(2,0)** Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 4}$.

(a) Esboce o domínio de f e esboce (no mesmo sistema de coordenadas) as curvas de nível nos níveis $k = 0, k = \sqrt{5}$ e $k = 2\sqrt{3}$.

(b) Esboce as intersecções do gráfico de f com os planos $x = 0$ e $y = 0$.

(c) Esboce o gráfico de f. Esse gráfico é uma parte de qual superfície quádrica?

(a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 - 4 \geq 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \geq 0\}$

$C_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$

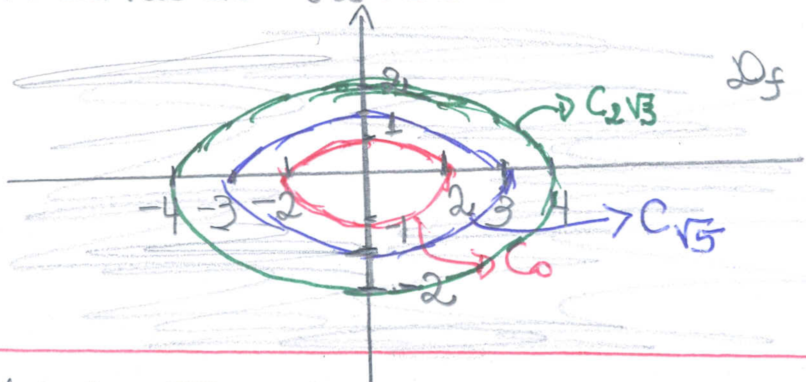
$C_{\sqrt{5}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + 4y^2 - 4} = \sqrt{5}\}$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 = 9$

$C_{2\sqrt{3}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + 4y^2 - 4} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 = 16$

A curvas de nível são todas elipses.



(b) $\boxed{x = 0}$

$z = f(0,y) = \sqrt{4y^2 - 4}$

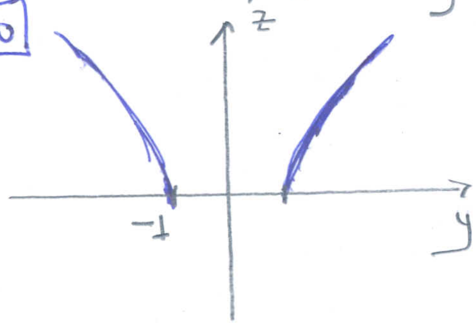
$\Rightarrow z^2 = 4y^2 - 4 \quad \Rightarrow 4y^2 - z^2 = 4$

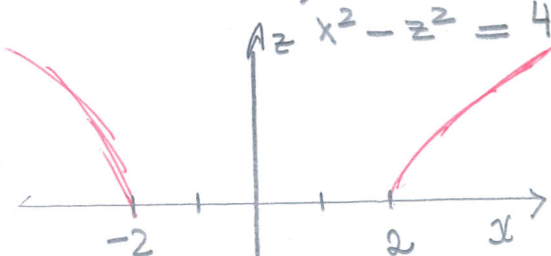
$\boxed{y = 0}$ $z = f(x,0) = \sqrt{x^2 - 4}$

$\Rightarrow z^2 = x^2 - 4 \Rightarrow$

$x^2 - z^2 = 4$

$\boxed{x=0}$





$z = f(x,y)$

$z^2 = x^2 + 4y^2 - 4$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$

Logo G_f é a parte superior desse hiperboloide de 1 folha.