B

MAT2127- Cálculo Diferencial e Integral II para Química

2ª prova - 14/10/2011

Nome: ______________________________

Nº USP: ______________________________

Questão	
1	
2	
3	
4	
Nota	

Instruções:

1 - Preencha o cabeçalho a tinta.
2 - Justifique todas as suas afirmações.
3 - Boa prova!

1. Seja $f(x,y) = 2x^2 + 2xy^2 + y^2$.

   (a) **(1,0)** Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação de f é a do vetor $\vec{v} = (1,1)$?

   (b) **(1,0)** Encontre os pontos da curva de nível $C_{14} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = 14\}$ nos quais a reta tangente é ortogonal ao vetor $\vec{v} = (1,1)$.

   (c) **(1,0)** Determine a equação da reta tangente em $(-1,1)$ à curva de nível 1 de f.

(a) A direção de maior variação de f em um ponto (x_0, y_0) é a do vetor $\nabla f(x_0,y_0)$. Queremos então os pontos (x_0,y_0) tais que $\nabla f(x_0,y_0) \parallel (1,1) = \vec{v}$.

Então, $\nabla f(x_0,y_0) = (4x_0 + 2y_0^2, 4x_0y_0 + 2y_0) = \lambda(1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Logo $4x_0 + 2y_0^2 = \lambda = 4x_0y_0 + 2y_0$,

Temos então $4x_0(1-y_0) + 2y_0(y_0-1) = 0 \Rightarrow$

$(1-y_0)(4x_0 - 2y_0) = 0$. Logo $y_0 = 1$ ou $y_0 = 2x_0$.

Resposta: todos os pontos das retas $y = 1$ e $y = 2x$.

(b) Seja $(x_0,y_0) \in C_{14}$ tal que a reta tangente seja ortogonal a $(1,1)$. Então, $\nabla f(x_0,y_0) \parallel (1,1)$.

Do item (a) temos: $y_0 = 1$ ou $y_0 = 2x_0$.

Mas como $(x_0,y_0) \in C_{14}$,

$2x_0^2 + 2x_0y_0^2 + y_0^2 = 14$

Se $y_0 = 1$ $\quad 2x_0^2 + 2x_0 + 1 - 14 = 0$

$x_0 = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 8 \cdot 13}}{4} = \dfrac{-2 \pm 6\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3\sqrt{3}}{2}$

Temos então os pontos $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, 1\right)$

Se $y_0 = 2x_0$, temos

$$2x_0^2 + 2x_0(2x_0)^2 + 4x_0^2 = 14$$

$$6x_0^2 + 8x_0^3 = 14$$

$$\Rightarrow 3x_0^2 + 4x_0^3 - 7 = 0$$

$x_0 = 1$ é raiz da equação

$$
\begin{array}{l|l}
3x_0^3 + 4x_0^2 - 7 & x_0 - 1 \\ \cline{2-2}
-3x_0^3 + 3x_0^2 & 3x_0^2 + 7x_0 + 7 \\ \cline{1-1}
\quad 7x_0^2 - 7 & \\
\quad -7x_0^2 + 7x_0 & \\ \cline{1-1}
\quad\quad 7x_0 - 7 &
\end{array}
$$

A equação $3x_0^2 + 7x_0 + 7 = 0$ não tem raízes reais. $(\Delta = 49 - 4 \cdot 3 \cdot 7 < 0)$

Logo o outro ponto é $(1, 2)$ //

(c) $\nabla f(-1,1) = (-2,-2)$

Logo a equação da reta tangente à C_1 em $(-1, 1)$ é

$$\nabla f(-1,1) \cdot (x+1, y-1) = 0 \Rightarrow$$

$$-2(x+1) - 2(y-1) = 0 \Rightarrow x + 1 + y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x + y = 0}$$

B

2. Seja $f(x,y)$ uma função de classe C^2 e seja $g(t,u) = f(2tu, t^2+u^2)$.

(a) **(1,5)** Determine $\frac{\partial g}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial t}$ em termos das derivadas parciais de f.

(b) **(1,0)** Sabendo que $\nabla f(4,5) = (3,2)$ e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(4,5) = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,5) = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(4,5) = 2,$$

calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial t}(2,1)$.

$x = 2tu \qquad y = t^2+u^2$

(a) $\frac{\partial g}{\partial t}(t,u) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot 2u + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot 2t$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial t}(t,u) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2u\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)2t + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)2u\right] + 2t\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)2t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)2u\right]$$

$$= 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 4ut\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right] + (4u^2+4t^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

(b) Se $(t,u) = (2,1)$, então $(x,y) = (4,5)$.

Logo $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial t}(2,1) = 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(4,5) + 8\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,5) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(4,5)\right] + (4.4+4)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(4,5)$

$$= 2 \cdot 3 + 8[1+2] + 20 \cdot (-1) = 10$$

B

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que:

- (I) A imagem da curva $\Gamma(t) = \left(t+1, t^2 - t - 1, \dfrac{2t^2+t}{t^4+1}\right)$ está contida no gráfico de f.
- (II) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,-1) = -1$, onde $\vec{u} = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$.

(a) **(0,5)** Determine $f(2,-1)$.

(b) **(2,0)** Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, -1, f(2,-1))$.

(a) Como $\mathrm{Im}\,\Gamma \subset G_f$, $f(t+1, t^2-t-1) = \dfrac{2t^2+t}{t^4+1}$ $\forall t$

Para obtermos $(2,-1)$

$t+1 = 2 \quad t^2 - t - 1 = -1$

$\Rightarrow \boxed{t = 1}$

Logo $f(2,-1) = \dfrac{3}{2}$.

(b) De (I) Seja $\vec{N} = (\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)}_{a}, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1)}_{b}, -1)$ o vetor normal a G_f em $(2,-1,f(2,-1))$.

Como $\mathrm{Im}\,\Gamma \subset G_f$ e f é diferenciável temos que $\vec{N} \perp \Gamma'(1)$. Escreva $\nabla f(2,-1) = (a,b)$

$\Gamma'(t) = \left(1, 2t-1, \dfrac{(4t+1)(t^4+1) - (2t^2+t).4t^3}{(t^4+1)^2}\right)$

Logo $\Gamma'(1) = \left(1, 1, \dfrac{10-12}{4}\right) = (1, 1, -\frac{1}{2})$.

Logo $(a, b, -1) \cdot (1, 1, -\frac{1}{2}) = 0$

$\Rightarrow \boxed{a + b + \frac{1}{2} = 0}$

De (II). Como f é diferenciável, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,-1) = (a,b) \cdot \vec{u}$

Logo $\boxed{-\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b = -1}$ Resolvendo o sistema temos $b = -1$ e $a = 1/2$.

Logo a equação do plano é $\boxed{z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(x-2) - 1(y+1)}$

4. Seja $a \in \mathbb{R}$, e seja $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$.

   (a) **(1,5)** Quantos pontos críticos existem quando $a \neq 0$? Classifique-os! (Veja o que ocorre quando $a > 0$ e $a < 0$.)

   (b) **(0,5)** Classifique o ponto crítico quando $a = 0$. **Justifique!**

(a) Como f é diferenciável os pontos críticos são aqueles em que as derivadas parciais se anulam.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3ay$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3ax$$

$$x^2 - ay = 0 \Rightarrow y = x^2/a \qquad y^2 - ax = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{a^2} - ax = 0 \Rightarrow x^4 - a^3 x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^3 - a^3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = a.$$

Logo os pontos críticos são $(0,0)$ e (a,a).

$$D(x,y) = 6x\,6y - (3a)^2 = 36xy - 9a^2.$$

pto crítico (x_0, y_0)	$D(x_0, y_0)$	$\partial^2 f/\partial x^2 (x_0,y_0)$	Conclusão
$(0,0)$	$-9a^2 < 0$	——	pto de sela
(a,a)	$27a^2 > 0$	$6a > 0$ se $a > 0$ < 0 se $a < 0$	$\to$ pto de mín. local $\to$ pto de máx local

(b) Se $a = 0$, $f(x,y) = x^3 + y^3$.
O único pto crítico é $(0,0)$.
$D(0,0) = 0$ e o critério não se aplica.
Entretanto, $(0,0)$ é <u>ponto de sela</u>, pois todo disco com centro em $(0,0)$ contém pontos $(a,0)$ com $a \neq 0$. Se $a > 0$ $f(a,0) = a^3 > 0 = f(0,0)$. Se $a < 0$, $f(a,0) = a^3 < 0 = f(0,0)$.