A

MAT2127- Cálculo Diferencial e Integral II para Química

2ª prova - 14/10/2011

Nome: ______________________________

Nº USP: ______________________________

Questão	
1	
2	
3	
4	
Nota	

Instruções:

1 - Preencha o cabeçalho a tinta.
2 - Justifique todas as suas afirmações.
3 - Boa prova!

1. Seja $f(x,y) = x^2 + 2x^2y + 2y^2$.

   (a) **(1,0)** Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação de f é a do vetor $\vec{v} = (1,1)$?

   (b) **(1,0)** Encontre os pontos da curva de nível $C_{14} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = 14\}$ nos quais a reta tangente é ortogonal ao vetor $\vec{v} = (1,1)$.

   (c) **(1,0)** Determine a equação da reta tangente no ponto $(1,-1)$ à curva de nível 1 de f.

(a) A direção de maior variação da função em um ponto (x_0, y_0) é a do vetor $\nabla f(x_0, y_0)$.
Queremos então todos os pontos (x_0, y_0) tais que $\nabla f(x_0, y_0) \parallel (1,1) = \vec{v}$.

$$\nabla f(x_0,y_0) = (2x_0 + 4x_0y_0,\ 2x_0^2 + 4y_0) = \lambda(1,1),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Logo $2x_0 + 4x_0y_0 = 2x_0^2 + 4y_0 = \lambda \Rightarrow$

$$2x_0 + 4x_0y_0 - 2x_0^2 - 4y_0 = 0$$

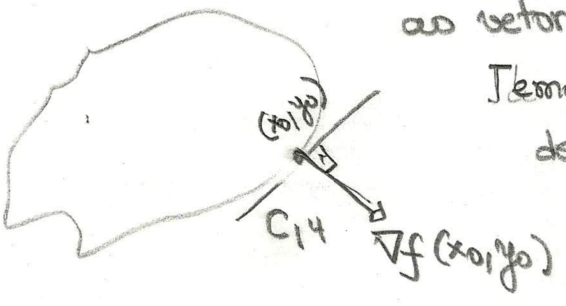
$$\Rightarrow 2x_0(1-x_0) - 4y_0(1-x_0) = 0$$

$$\Rightarrow (1-x_0)(2x_0 - 4y_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ ou } x_0 = 2y_0.$$

RESP: Em todos os pontos da reta $x = 1$ e da reta $x = 2y$.

(b) Seja $(x_0, y_0) \in C_{14}$. Se a reta tangente é ortogonal ao vetor $\vec{v} = (1,1)$, então $\nabla f(x_0,y_0) \parallel \vec{v}$.

Temos então que encontrar os pontos (x_0,y_0) de C_{14} tais que $\nabla f(x_0,y_0) \parallel (1,1)$.



Do item (a) já sabemos que $x_0 = 1$ ou $x_0 = 2y_0$.

$x_0^2 + 2x_0^2 y_0 + 2y_0^2 = 14$

Se $x_0 = 1 \implies$

$$1 + 2y_0 + 2y_0^2 = 14$$
$$2y_0^2 + 2y_0 - 13 = 0$$
$$y_0 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8 \times 13}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{108}}{4} = \frac{-2 \pm 2.3\sqrt{3}}{4}$$

Os pontos são $\left(1, \frac{-1 \pm 3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Se $x_0 = 2y_0$ temos

$$(*) \quad 4y_0^2 + 8y_0^3 + 2y_0^2 = 14$$
$$8y_0^3 + 6y_0^2 - 14 = 0 \implies$$
$$4y_0^3 + 3y_0^2 - 7 = 0$$

Vê-se facilmente que $y_0 = 1$ é uma raiz da equação.. $4y_0^3 + 3y_0^2 - 7 = (y_0 - 1)(4y_0^2 + 7y_0 + 7)$

$4y_0^2 + 7y_0 + 7$

$$\Delta = 49 - 4.4.7 = 49 - 112 < 0.$$

A única sol. de $(*)$ é $y_0 = 1$ e nesse caso, $x_0 = 2$.

Logo, o ponto é $(2, 1)$.

(c) $\nabla f(x,y) = (2x + 4xy, 2x^2 + 4y)$

$$\nabla f(1,-1) = (-2, -2)$$

A equação da reta tangente é

$$\nabla f(1,-1) \cdot (x-1, y+1) = 0$$
$$-2(x-1) - 2(y+1) = 0$$
$$x - 1 + y + 1 = 0$$
$$x + y = 0$$

A

2. Seja $f(x,y)$ uma função de classe C^2 e seja $g(t,u) = f(t^2+u^2, 2tu)$.

   (a) **(1,5)** Determine $\frac{\partial g}{\partial u}$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial u}$ em termos das derivadas parciais de f.

   (b) **(1,0)** Sabendo que $\nabla f(5,4) = (2,3)$ e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(5,4) = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(5,4) = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(5,4) = 2,$$

   calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial u}(1,2)$.

(a) $\begin{cases} x = t^2 + u^2 \\ y = 2tu \end{cases}$ $\quad \frac{\partial x}{\partial t} = 2t \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 2u$

$\frac{\partial y}{\partial t} = 2u \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2t$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(t,u) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot 2u + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot 2t$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial u}(t,u) = 2u\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)2t + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)2u\right]$$

$$+ 2\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] + 2t\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\cdot 2t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)2u\right]$$

Como f é de classe C^2, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$. Logo

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial u}(t,u) = {} & 4tu\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + (4u^2+4t^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ & + 4tu\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).\end{aligned}}$$

(b) $(t,u) = (1,2) \Rightarrow (x,y) = (1^2+2^2, 2.1.2) = (5,4)$

Logo $\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial u}(1,2) = 8\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(5,4) + 4(5).\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(5,4)$

$+ 8\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(5,4) + 2\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(5,4)$

$= 8.1 + 20(-1) + 8.2 + 2.3 = 10$

A

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que:

- (I) A imagem da curva $\Gamma(t) = \left(t^2 - t - 1, t+1, \dfrac{2t^2+t}{t^4+1}\right)$ está contida no gráfico de f.
- (II) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-1,2) = 1$, onde $\vec{u} = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

(a) **(0,5)** Determine $f(-1,2)$.

(b) **(2,0)** Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-1,2,f(-1,2))$.

(a) Como $\operatorname{Im}\Gamma \subset G_f$, $\dfrac{2t^2+t}{t^4+1} = f(t^2-t-1, t+1)$.

Quero t_0 tq $\Gamma(t_0) = (-1,2)$.

Então $\underline{t_0^2 - t_0 - 1 = -1}$ e $1 + t_0 = 2$

$\Rightarrow \boxed{t_0 = 1}$

Logo, $f(-1,2) = \dfrac{2+1}{1+1} = 3/2$.

(b) Precisamos determinar $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,2)$ e $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,2)$.

(I) $\Rightarrow$ Como $\operatorname{Im}\Gamma \subset G_f$, a reta tangente à $\operatorname{Im}\Gamma$ em $(-1, 2, f(-1,2))$ é ortogonal ao vetor $N = (a, b, -1)$.

O vetor diretor da reta tangente à $\operatorname{Im}\Gamma$ em $(-1,2,f(-1,2))$ é $\Gamma'(1)$. Temos que $\Gamma'(t) = \left(2t-1, 1, \dfrac{(4t+1)(t^4+1)-(2t^2+t)4t^3}{(t^4+1)^2}\right)$

Logo, $\Gamma'(1) = (1, 1, -1/2)$.

Assim $N \cdot \Gamma'(1) = (a, b, -1) \cdot (1, 1, -\frac{1}{2}) = 0$

$\Rightarrow \boxed{a + b + \dfrac{1}{2} = 0}$

De (II). Como f é diferenciável, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-1,2) = \nabla f(-1,2) \cdot \vec{u}$

$= (a,b) \cdot \left(-\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right) = \boxed{-\dfrac{3}{5}a + \dfrac{4}{5}b = 1}$

Resolvendo o sistema temos:

$a = -1$ e $b = 1/2$.

A equação do plano tangente é: $\boxed{z = \dfrac{3}{2} + 1\cdot(x+1) + \dfrac{1}{2}(y-2)}$.

4. Seja $a \in \mathbb{R}$, e seja $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3axy$.

   (a) **(1,5)** Quantos pontos críticos existem quando $a \neq 0$? Classifique-os! (Veja o que ocorre quando $a > 0$ e $a < 0$.)

   (b) **(0,5)** Classifique o ponto crítico quando $a = 0$. **Justifique!**

(a) Como f é diferenciável, os pontos críticos de f são aqueles em que as derivadas parciais se anulam.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3ay$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 3ax$

$3x^2 + 3ay = 0 \Rightarrow y = -\frac{x^2}{a}$. Logo

$3y^2 + 3ax = 3\frac{x^4}{a^2} + 3ax = 0$

Logo $x^4 + a^3x = 0 \Rightarrow x(x^3 + a^3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -a$.

Assim, os pontos críticos são $(0,0)$ e $(-a,-a)$.

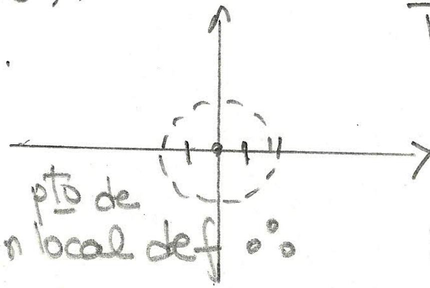
$$D(x,y) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = 6x\,6y - (3a)^2$$

$$= 36xy - 9a^2$$

pto crítico (x_0,y_0)	$D(x_0,y_0)$	$\partial^2 f/\partial x^2\,(x_0,y_0)$	Conclusão
$(0,0)$	$-9a^2 < 0$	——	pto de sela
$(-a,-a)$	$27a^2 > 0$	$-2a < 0$ se $a > 0$	$\to$ pto de máx. local
		$-2a > 0$ se $a < 0$	$\to$ pto de mín. local

(b) Quando $a = 0$, $f(x,y) = x^3 + y^3$. O único pto crítico de f é $(0,0)$ e o critério acima não se aplica. $(D(0,0) = 0)$.

Mas $f(0,0) = 0$.



Todo disco em torno do $(0,0)$ tem pontos da forma $(\lambda,0)$ com $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$.

Se $\lambda > 0$, $f(\lambda,0) = \lambda^3 > 0 = f(0,0)$

Se $\lambda < 0$, $f(\lambda,0) = \lambda^3 < 0 = f(0,0)$ *

(*) Logo $(0,0)$ NÃO é pto de máx local nem de mín local de f $\therefore$ é pto de sela.