MAT2127 - Cálculo Diferencial e Integral para Química II
Lista 9 - 2011

1. Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

2. Mostre que o elipsóide
$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$$
e a esfera
$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$$
se tangenciam no ponto $(1, 1, 2)$ (isto é, que elas têm o mesmo plano tangente neste ponto).

3. Verifique que as superfícies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ possuem vetores normais mutuamente ortogonais em todos os pontos da interseção.

4. Em qual ponto do paraboloide $y = x^2 + z^2$ o plano tangente é paralelo ao plano $x + 2y + 3z = 1$?

5. Existem pontos no hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $z = x + y$?

6. Mostre que a soma das intersecções com os eixos x, y e z de qualquer plano tangente à superfície
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$$
é uma constante.

7. Mostre que toda reta normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ passa pelo centro da esfera.

8. Ache um vetor tangente à interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

9. Ache a reta da tangente à interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 2$ com gráfico de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 2$ no ponto $(1, 1, 4)$.

10. Determine a equação da esfera que tangencia a superfície
$$(x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - (z-1)^2 = 0$$
nos pontos $(2, 2, 2)$ e $(2, 2, 0)$.

11. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

    (a) $f(x, y, z) = xe^z + \text{sen}(y)$, $(2, 0, 0)$

(b) $f(x,y,z) = -\dfrac{4}{y} + z\ln(x),\ (1,2,-1)$

12. Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico V é dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

    (a) Ache a taxa de variação do potencial em $P(3,4,5)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

    (b) Em que direção V muda mais rapidamente em P?

    (c) Qual é a maior taxa de variação em P?

13. Encontre o volume máximo de uma caixa retangular inscrita em uma esfera de raio r.

14. Uma caixa de papelão sem tampa deve ter volume igual a 32 m^3. Determine as dimensões que minimizem a quantidade de material utilizado. (Pode admitir que o problema tem solução.)

15. Quais são os pontos da superfície $y^2 = 9 + xz$ que estão mais próximos da origem?

16. A temperatura num ponto (x,y,z) do espaço é dada por $T(x,y,z) = xy + yz$. Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.

RESPOSTAS

4. $\left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, -\frac{3}{4}\right)$

5. Não

8. O vetor tangente à intersecção no ponto $(-1,1,2)$ é paralelo ao produto vetorial $(-2,2,-1) \times (-4,1,2) = (5,8,6)$.

9. $X = (1,1,4) + \lambda(-1,1,0), \lambda \in \mathbb{R}$.

10. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$.

11. (a) $\sqrt{6}; (1,1,2)$ (b) $\sqrt{2}; (-1,1,0)$

12. (a) $\frac{32}{\sqrt{3}}$ (b) $(38,6,12)$ (c) $2\sqrt{406}$

13. O volume é $\frac{8r^3}{3\sqrt{3}}$.

14. As dimensões são $4, 4$ e 2.

15. $(0, \pm 3, 0)$

16. Mais quentes: $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})$
    Mais frios: $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})$