MAT2127 - Cálculo Diferencial e Integral para Química II
Lista 8 - 2011

1. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região K indicada. (Esboce K.)

   (a) $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$; K é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$

   (b) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$; $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 \leq 2, \, x \leq 0, \;\; y \geq 0\}$

   (c) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$; $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 \leq 1\}$

   (d) $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y$; $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 1 \leq x \leq 3, \;\; -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

   (e) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$; $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$

2. Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0,0)$.

3. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.

4. Encontre 3 números positivos cuja soma seja 12 e tal que a soma de seus quadrados seja mínima.

5. Determine a distância entre as retas de equação

   $X = (-2,3,-1) + \alpha(4,1,5), \;\; \alpha \in \mathbb{R}$ e $X = (-1,0,3) + \mu(-2,3,1), \;\; \mu \in \mathbb{R}$.

6. Determine os pontos do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que estão mais próximos do ponto $(4,2,0)$.

7. Determine o ponto do plano $x - y + z = 4$ que está mais próximo do ponto $(1,2,3)$.

8. Determine o volume da maior caixa retangular no primeiro octante com 3 faces nos planos coordenados e um vértice no plano $x + 2y + 3x = 6$.

9. Sejam x, y e z ângulos de um triângulo. Ache o valor máximo de $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z$.

10. (**Método dos Mínimos Quadrados)** Suponha que um cientista tenha razões para acreditar que duas quantidades x e y estejam relacionadas linearmente, ou seja, $y = mx + b$, pelo menos aproximadamente, para algum valor de m e b. O cientista realiza uma experiência e obtém pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$, $n > 2$. Os pontos não estão todos alinhados, de modo que o cientista quer encontrar m e b de modo que a reta $y = mx + b$ **ajuste os pontos o melhor possível**, no sentido em que se

    $$d_i = y_i - (mx_i + b)$$

    para todo $i = 1, ..., n$, então o **erro quadrático**

    $$\sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

é mímimo. Mostre que, de acordo com esse método, a reta de melhor ajuste é obtida quando

$$m\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Assim a reta é determinada resolvendo esse sistema de 2 equações e 2 incógnitas m e b.

RESPOSTAS

1. (a) máximo: $f(4,5) = 13$, mínimo: $f(4,0) = -7$;

   (b) máximo: $f(0,0) = 0$, mínimo: $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -\dfrac{1}{2e}$;

   (c) máximo: $f(1,0) = 2$, mínimo: $f(-1,0) = -2$;

   (d) máximo: $f(2,0) = 4$, mínimo: $f(3,-\frac{\pi}{4}) = f(3,\frac{\pi}{4}) = f(1,-\frac{\pi}{4}) = f(1,\frac{\pi}{4}) = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$;

   (e) máximo: $f(3,0) = 83$, mínimo: $f(1,1) = 0$.

2. $(1,1)$ e $(-1,-1)$

3. Os números são $n_1 = n_2 = n_3 = \dfrac{100}{3}$.

4. Os números são $n_1 = n_2 = n_3 = 4$.

5. $\sqrt{12}$.

6. $(2, 1\sqrt{5})$ e $(2, 1-\sqrt{5})$

7. $(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{11}{3})$

8. $\frac{4}{3}$

9. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$