MAT2127 - Cálculo Diferencial e Integral para Química II
Lista 6 - 2011

1. Seja $f = f(x, y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(u, v) = uf(u^2 - v, u + 2v).$$

   (a) Determine $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ em função das derivadas parciais de f.

   (b) Sabendo que $3x + 5y = z + 26$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 4, f(1, 4))$, que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,4) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4) = 1 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4) = -1,$$

   calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2, 3)$.

   Resposta: (b) 21

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(0, 2, f(0, 2)\big)$. Seja

$$g(u, v) = u\, f\big(\operatorname{sen}(u^2 - v^3), 2u^2 v\big).$$

   Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $\big(1, 1, g(1, 1)\big)$ seja paralelo ao vetor $(4, 2, a)$.

   Resposta: $a = -4$

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e suponha que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2, t, 2t^2)$ e $\mu(t) = (2t^2, t, 2t^4)$ estejam contidas no gráfico de f. Determine o gradiente de f no ponto $(2, 1)$.

   Resposta: $\nabla f(2, 1) = (1, 4)$.

4. Seja $f(x, y) = \cos(x - y) - xe^y$. Determine a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém o ponto $(1, 1)$ em $(1, 1)$.

   Resposta: $x + y = 0$.

5. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

   (a) $f(x, y) = xe^{-y} + 3y$, $(1, 0)$;

   (b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(1, 2)$.

   Resposta: (a) $\sqrt{5}, (2, 1)$; (b) $\frac{2}{\sqrt{5}}, \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

6. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e considere os pontos $A = (1,3)$, $B = (3,3)$, $C = (1,7)$ e $D = (6,15)$. Sabe-se que a derivada direcional de f em A na direção de $\overrightarrow{AB}$ é 3 e que a derivada direcional e f em A na direção de $\overrightarrow{AC}$ é 26. Encontre a derivada direcional de f em A na direção do versor de $\overrightarrow{AD}$.

   Resposta: $\nabla f(1,3) = (11,-7)$ e a derivada direcional pedida é $-\frac{29}{13}$.

7. Mostre que $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ é contínua em $(0,0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$. É f diferenciável em $(0,0)$?

   Resposta: f não é diferenciável em $(0,0)$.

8. Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação da função

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$$

   é a do vetor $(1,1)$.

   Resposta: Em todos os pontos da reta $y = x + 1$.

9. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que a imagem da curva

$$\gamma(t) = (t+1, -t^2), \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

   está contida em uma curva de nível de f. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,-4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1,-4)$ e na direção e sentido do versor de $\vec{u} = (3,4)$.

   Resposta: $\frac{4}{5}$.

10. Sejam $f(x,y) = 3x^2y - 2xy^2$ e $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

    (I) $\nabla f(x_0,y_0)$ é tangente à curva $xy^3 - x^3y - 2xy - y^3 + 6 = 0$ no ponto $(1,2)$;

    (II) a derivada direcional de f no ponto (x_0,y_0) na direção do vetor $\vec{w} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ é igual a $\dfrac{9}{\sqrt{2}}$.

    Determine <u>todos</u> os pontos (x_0,y_0) para os quais se tem <u>simultaneaneamente</u> as condições (I) e (II) acima satisfeitas.

    Resposta: Os pontos são $\left(\sqrt{6}, 3\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{6}, -3\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

11. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que:

    (I) a imagem da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = \left(t^2+t+1, 2t+3, \dfrac{5t+1}{t^2+1}\right)$ está contida no gráfico de f;

    (II) a imagem da curva $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mu(t) = (t^2+t-1, t+2)$ está contida em uma curva de nível de f.

    Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,3,f(1,3))$.

    Resposta: $z = -x + 3y - 7$.