MAT2127 - Cálculo Diferencial e Integral para Química II
Lista 5 - 2011

1. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

   (a) $z = e^{x^2+y^2}$ no ponto $(0, 0, 1)$,
   (b) $z = \ln(2x + y)$ no ponto $(-1, 3, 0)$,
   (c) $z = x^2 - y^2$ no ponto $(-3, -2, 5)$,
   (d) $z = e^x \ln y$ no ponto $(3, 1, 0)$.

2. Determine o plano que passa por $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e é tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$. Existe mesmo só um?

3. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0, 1, 5)$ e $(0, 0, 6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x, y) = x^3 y$.

4. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = \ln(x^2 + ky^2)$ no ponto $(2, 1, f(2, 1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície
$$z = xf\left(\frac{x}{y}\right)$$
passam pela origem.

6. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

   (a) $w = x^2 + y^2; x = t^2 + u^2, y = 2tu.$
   (b) $w = \dfrac{x}{x^2 + y^2}; x = t \cos u, y = t\,\mathrm{sen} u.$

7. Seja $f(x, y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e sejam a, b, c, d constantes tais que $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ e $ac + bd = 0$. Seja $g(u, v) = f(au + bv, cu + dv)$. Mostre que:
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(au + bv, cu + dv) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(au + bv, cu + dv).$$

8. Seja $u = u(x, y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r\,\mathrm{sen}\theta)$. Verifique que
$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r, \theta) = \Delta u(r \cos \theta, r\,\mathrm{sen}\theta),$$
onde, por definição, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

9. Seja $f = f(x, y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Se $u(s, t) = f(e^s \cos t, e^s \mathrm{sen} t)$, mostre que
$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(e^s \cos t, e^s \mathrm{sen} t)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(e^s \cos t, e^s \mathrm{sen} t)\right]^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}(s, t)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s, t)\right)^2\right]$$
e que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^s \cos t, e^s \mathrm{sen} t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e^s \cos t, e^s \mathrm{sen} t) = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s, t)\right].$$

10. A pressão de um mol de gás ideal é aumentada à taxa de $0,05$kPa/s e a temperatura é elevada à taxa de 0,15 K/s. Utilize a equação $PV = 8,31T$ para achar a taxa de variação do volume quando a pressão é 20kPa e a temperatura é 320K.

11. Se $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, ache o vetor gradiente $\nabla f(2,1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível 8 de f no ponto $(2,1)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

12. Seja r a reta tangente à curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1,2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta r.

13. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$ e

$$g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t).$$

Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g em $t = 1$ seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

14. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Para um determinado ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(x_0, y_0,\ f(x_0,y_0)\big)$ tem equação $-2x + 2y - z + 3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma cuja imagem **não pode** estar contida na curva de nível de f que contém o ponto P:

   (a) $\gamma(t) = \left(-\dfrac{1}{t}, t\right)$;

   (b) $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^5}{5}, -\dfrac{2t^3}{3} + 3t\right)$;

   (c) $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$.

15. Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$ e seja $\gamma(t) = (t\ \cos t, t\,\mathrm{sen} t, \sqrt{t^2+4}),\ t \geq 0$.

   (a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.

   (b) Faça um esboço da imagem de γ.

RESPOSTAS

1. (a) $z = 1; X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) $2x + y - z - 1 = 0; X = (-1,3,0) + \lambda(2,1,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.
   (c) $6x - 4y + z + 5 = 0; X = (-3,-2,5) + \lambda(6,-4,1), \lambda \in \mathbb{R}$.
   (d) $e^3 y - z - e^3 = 0; X = (3,1,0) + \lambda(0,e^3,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

2. $x + 6y - 2z - 3 = 0$ (sim, só um)

3. $6x - y - z + 6 = 0$

4. $k = 8$

10. $\approx 0,27$L/s

11. $\nabla f(2,1) = (4,8)$ e a reta é $x + 2y - 4 = 0$.

12. $X = (\pm 1, \pm 2) + \lambda(5,-4), \lambda \in \mathbb{R}$.

13. $a = 3$

14. (c)