MAT2127 - Cálculo Diferencial e Integral para Química II
Lista 4 -Exercício 7- 2011

Sejam $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$. Mostre que as derivadas parciais de f são contínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

Solução

Observe inicialmente que $f(x,y) = f(y,x)$, e assim, tudo o que acontecer para $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ acontece igualmente para $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Vamos então analisar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

1. $(x,y) \neq (0,0)$

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4}{3}\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}$$

2. $(x,y) = (0,0)$

   Não podemos calcular a derivada parcial em $(0,0)$ usando regra de derivação pois a função $g(u) = u^{\frac{2}{3}}$ não é derivável em $u = 0$. Assim, vamos calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ pela definição.

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{3}} = 0.$$

3. Temos então que

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{3}\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   Nos pontos $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ temos que a função $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua, pois é uma função racional. Para ver que é contínua em $(0,0)$ tem que provar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4}{3}\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{4}{3}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

   pois

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\underbrace{x}_{\to 0}\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}} = 0.$$