MAT2127 - Cálculo Diferencial e Integral para Química II
Lista 4 - 2011

1. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:
   (a) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ (b) $f(x,y) = \ln(1+\cos^2(xy^3))$

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:
   (a) $u(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ (b) $u(x,y) = f(ax+by)$, onde a e b são constantes.

3. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\, e^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, ache $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

   [**Sugestão:** Dá menos trabalho usar a definição de derivada parcial como limite do que aplicar as regras de derivação.] [**Resposta:** $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = -2$.]

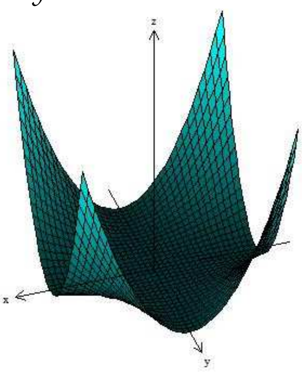
4. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

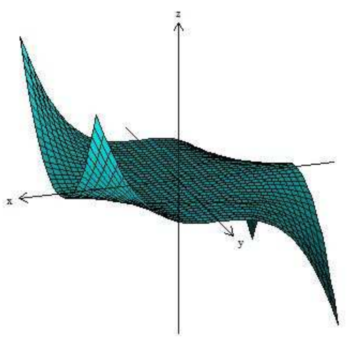
5. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, deriváveis até 2ª ordem.

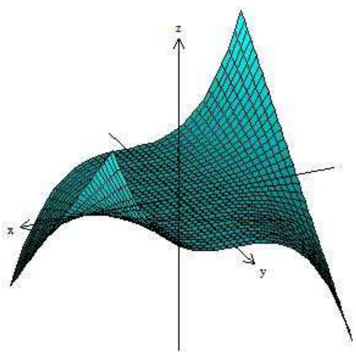
   (a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ ($c \neq 0$ é uma constante) satisfaz a equação $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

   (b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

6. As superfícies abaixo são os gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Identifique cada superfície e justifique sua escolha.


(a)


(b)


(c)

7. Sejam $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$. Mostre que as derivadas parciais de f são contínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

8. Verifique que a função $z = \ln(e^x + e^y)$ satisfaz as equações diferenciais

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

e

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

9. A temperatura em um ponto (x, y) de uma chapa de metal é dada por

$$T(x,y) = \frac{60}{1 + x^2 + y^2},$$

onde T é medido em $^\circ C$ e x e y em metros. Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $(1, 2)$ (a) em relação a x e (b) em relação a y.

[**Resposta:** $\dfrac{\partial T}{\partial x}(1,2) = -\dfrac{10}{3}{}^\circ C/m$ e $\dfrac{\partial T}{\partial y}(1,2) = -\dfrac{20}{3}{}^\circ C/m$.]

10. A lei dos gases para uma massa fixa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e volume V é $PV = mRT$, onde R é a constante do gás. Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

e que

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = mR.$$

11. A energia cinética de um corpo com massa m e velocidade v é $K = \frac{1}{2}mv^2$. Mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K.$$

12. Seja $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ Determine (se existir) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, -a)$ onde $a \in \mathbb{R}$.

[**Resposta:** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, -a)$ não existe se $a \neq 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$.]