MAT2127 - Cálculo Diferencial e Integral para Química II
Lista 2 - 2011

1. Ache e esboce o domínio das funções:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$ (b) $f(x,y) = \text{arctg}\,\dfrac{y}{x}$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ (d) $f(x,y) = \dfrac{x}{y^x}$

   (e) $f(x,y) = \text{tg}(x-y)$ (f) $f(x,y) = \ln(xy^2 - x^3)$

   (g) $f(x,y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$

2. Esboce uma família de curvas de nível de:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ (b) $f(x,y) = x - \sqrt{1-y^2}$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2-y^2}$ (d) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$

3. Esboce os gráficos de:

   (a) $f(x,y) = 1 - x - y$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+9y^2}$

   (d) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ (e) $f(x,y) = y^2 - x^2$ (f) $f(x,y) = y^2 + 1$

   (g) $f(x,y) = y^2 + x$ (h) $f(x,y) = xy$ (i) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (j) $f(x,y) = \dfrac{1}{4x^2+9y^2}$ (k) $f(x,y) = (x-y)^2$ (l) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$

   (m) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$ (n) $f(x,y) = \ln(9x^2+y^2)$ (o) $f(x,y) = 2 - \sqrt[4]{x^2+4y^2}$

   (p) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$ (q) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$

4. Seja $\gamma(t) = (e^t + 1, e^{-t})$, para $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Desenhe a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

   (b) A imagem de γ está contida na curva de nível de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

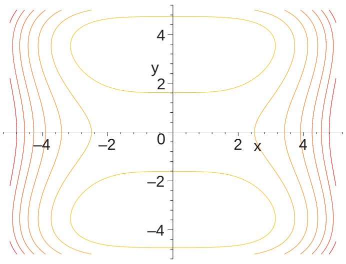
5. Sejam

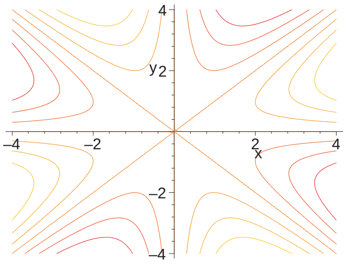
$$\gamma(t) = (2 - \cos t, \sec^2 t + 3), t \in [0, \frac{\pi}{2}[\text{ e } f(x,y) = ((x-2)^2(y-3))^{\frac{2}{3}} + 1.$$

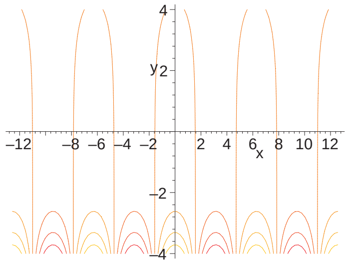
   Esboce a imagem de γ e mostre que a imagem de γ está contida em uma curva de nível de f indicando qual é o nível.

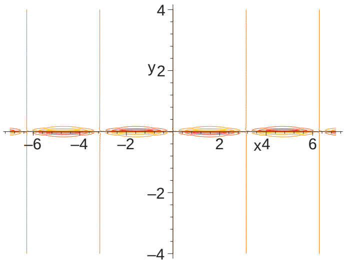
6. Seja $f(x,y) = \dfrac{3(x-1)^2 + (y-1)^2}{x^2 - y^2}$. Esboce (no mesmo sistema de coordenadas) as curvas de nível de f nos níveis $k = 1$ e $k = 3$.

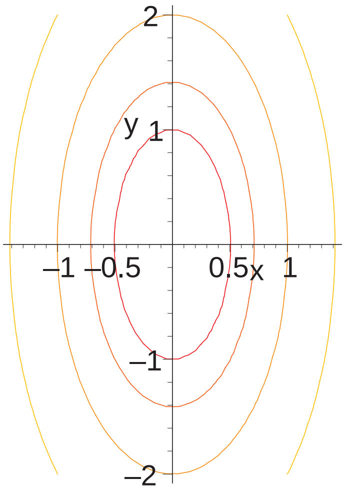
7. São dadas a seguir as curvas de nível e os gráficos de seis funções de duas variáveis reais. Decida quais curvas de nível correspondem a quais gráficos.

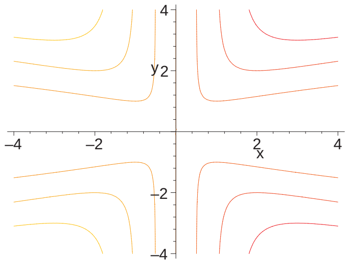
(I)


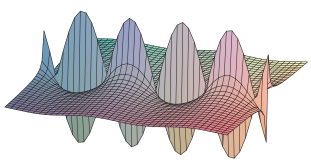
(II)


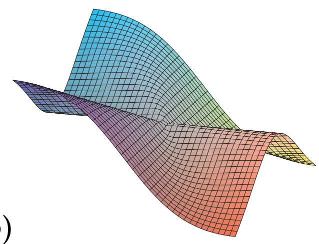
(III)


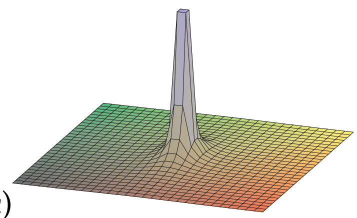
(IV)


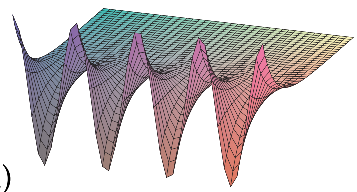
(V)


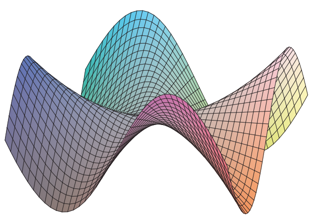
(VI)


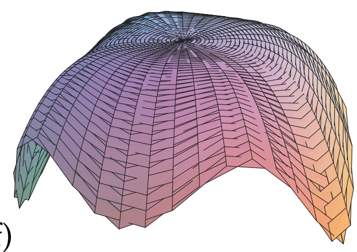
(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)


8. Encontre uma parametrização para a curva de nível no nível k de f nos casos:

   (a) $f(x,y) = x + 2y - 3, \;\; k = -2;$

   (b) $f(x,y) = x - \sqrt{1-2y^2}, \;\; k = 5;$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2}, \;\; k = 1.$

   Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a), (b) e (c) acima nos pontos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(6,0)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

9. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:

   (a) $z + 2y + 3z = 1$
   (b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$
   (c) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
   (d) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$
   (e) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
   (f) $x^2 - y^2 = 1$
   (g) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

   Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

RESPOSTAS

1. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$
   (b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$
   (c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$
   (d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$
   (e) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi, \; k \in \mathbb{Z}\}$
   (f) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(y-x)(y+x) > 0\}$
   (g) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 < 16\}$

4. (b) Sim, no nível 5.

5. No nível $k = 2$.

8. (a) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t, \frac{1}{2}(1-t))$
   Reta tangente: $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + \lambda(2, -1), \lambda \in \mathbb{R}$

   (b) $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (5 + \text{sen}(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t))$
   Reta tangente: $X = (6,0) + \lambda(1,0), \lambda \in \mathbb{R}$

   (c) $\gamma :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\to \mathbb{R}^2, \gamma_1(t) = (\sec(t), \text{tg}(t))$
   Reta tangente: $X = (\sqrt{2}, 1) + \lambda(\sqrt{2}, 1), \lambda \in \mathbb{R}$

9. Apenas a superfície do item (a).