MAT2127 - Cálculo Diferencial e Integral para Química II
Lista 1 - 2011

1. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

   (a) $\gamma(t) = (1, t)$
   (b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen} t)\ ,\ 0 \leq t \leq 2\pi$
   (c) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$
   (d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\operatorname{sen} t)$
   (e)$\gamma(t) = (\dfrac{1}{2}, 1 - t)$
   (f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)\ ,\ t \geq 0$
   (g) $\gamma(t) = (\sec t, \operatorname{tg} t)\ ,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
   (h) $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\operatorname{sen} t)$

2. Encontre o vetor tangente em cada ponto da curva. Ache os pontos da curva nos quais a tangente é horizontal ou vertical. Estude a concavidade. Esboce a imagem de γ, explicitando os pontos de auto-intersecção (se houver).

   (a) $\gamma(t) = (t(t^2 - 3), 3(t^2 - 3))$
   (b) $\gamma(t) = (t^3 - 3t^2, t^3 - 3t)$
   (c) $\gamma(t) = (t - \ln t, t + \ln t)$
   (d) $\gamma(t) = (2t^3 - 3t^2, t^3 - 12t)$

3. (a) Considere a curva dada por $\gamma(t) = \left(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$. Calcule os limites de $\gamma(t)$ quanto $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$. Estude $\gamma'(t)$ e faça um esboço da curva.

   (b) Considere a curva dada por

   $$\gamma(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$$

   Determine o domínio de γ. Calcule os limites de $\gamma(t)$ quando t tende a -1 pela direita e pela esquerda, bem como os limites quando $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$. Calcule $\gamma(0)$. Estude $\gamma'(t)$ e faça um esboço da curva.

   (c) Considere a curva dada por $\gamma(t) = (t^3 - 12t, t^2 - 2t)$. Calcule os limites de $\gamma(t)$ quanto $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$. Estude $\gamma'(t)$ e a concavidade da imagem de γ. Faça um esboço da curva.

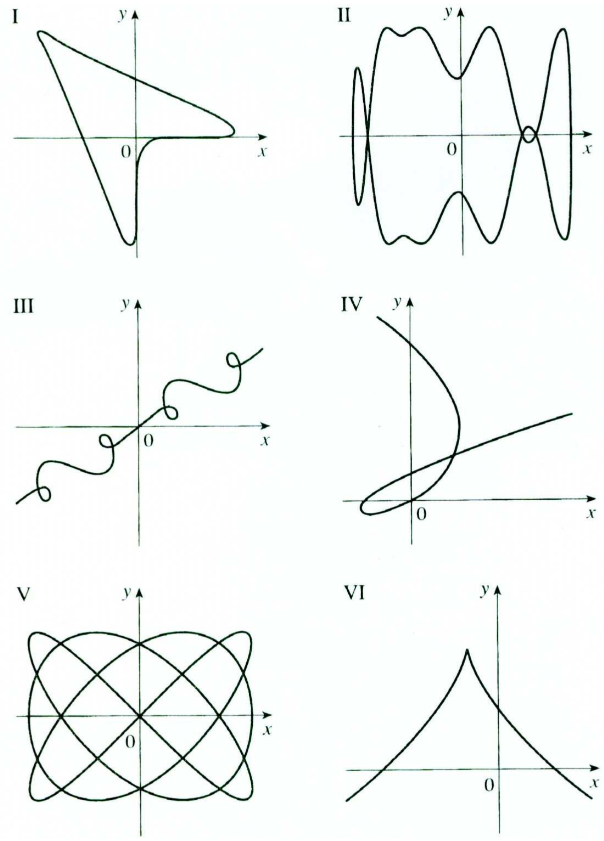
4. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t\, ,\ \operatorname{sen}\ t \cos\ t)$ tem duas tangentes em (0,0) e ache suas equações. Esboce a curva.

5. Considere $f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$. A função f é derivável em $x = 0$? Determine uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f.

6. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. Mostre que, se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $||\gamma(t)|| = C$, para todo $t \in I$, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t \in I$. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

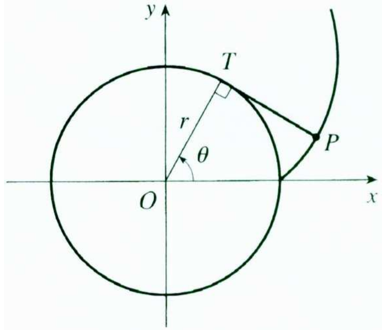
7. Associe as equações paramétricas aos gráficos I a VI. Justifique sua escolha.

   (a) $x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 - t$
   (b) $x = t^3 - 1, \quad y = 2 - t^2$
   (c) $x = \text{sen}\,(3t), \quad y = \text{sen}\,(4t)$
   (d) $x = t + \text{sen}\,(2t), \quad y = t + \text{sen}\,(3t)$
   (e) $x = \text{sen}\,(t + \text{sen}\,t), \quad y = \cos(t + \cos t)$
   (f) $x = \cos t, \quad y = \text{sen}\,(t + \text{sen}\,(5t))$

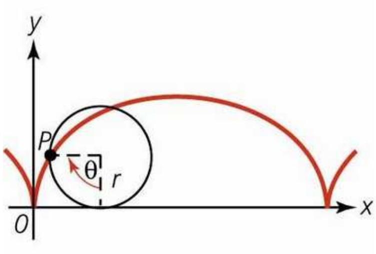


8. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, a posição inicial de P for $(r, 0)$, e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, mostre que as equaçõoes paramétricas da involuta são:

$$x = r(\cos\theta + \theta\text{sen}\,\theta) \qquad y = r(\text{sen}\,\theta - \theta\cos\theta)$$



9. Uma circunferência de raio r rola sem escorregar ao longo do eixo Ox. Encontre equações paramétricas para a curva descrita por um ponto da circunferência que se encontra inicialmente no origem. (Esta curva é chamada de **cicloide**; veja figura.)



10. Calcular o comprimento da curva γ:

    (a) $\gamma_1(t) = (2t^2 - 1, 4t^2 + 3)$, $t \in [-4, 4]$;

    (b) $\gamma_2(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t)$, $t \in [0, \pi]$;

    (c) $\gamma_3(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - t \cos t)$, $t \in [0, \pi]$.

11. Calcule o comprimento de um arco da cicloide do exercício 9.

RESPOSTAS

2. (a) Horizontal: $(0, -9)$; Vertical: $(-2, -6), (2, -6)$.

(b) Horizontal: $(-2, -2), (-4, 2)$; Vertical: $(0, 0)$, $(-4, 2)$.

(c) Horizontal: não tem ; Vertical: $(1, 1)$.

(d) Horizontal: $(4, -16)$, $(-28, 16)$; Vertical: $(0, 0), (-1, -11)$.

Auto-intersecção: (a) $(0, 0)$; (b) $(-4, 2)$; (c) e (d) não têm.

4. $y = x$ e $y = -x$

5. Não. $\gamma(t) = (t^3, t^2)$

10. (a) $L(\gamma_1) = 64\sqrt{5}$; (b) $L(\gamma_2) = 2\sqrt{2}$; (c) $L(\gamma_3) = \dfrac{\pi^2}{2}$.

11. $8r$