MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear
Lista 5
2020

NOTAÇÃO: Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Denote por $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a transformação linear definida por $T_A(x, ..., x_n) = (y_1, ..y_m)$ onde $A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$.

1. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z, t) = (x + z + t, y - z + t, 2x + y + z + 3t)$.
   (a) Determine a matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $T = T_A$.
   (b) Determine uma base de Ker$T$ e uma base de ImT.
   (c) Verifique se o vetor $v = (3, 1, 7)$ está na ImT. Em caso afirmativo, determine $u \in \mathbb{R}^4$ tal que $T(u) = v$.

2. Sejam V_1, V_2, V_3 espaços vetoriais e $T : V_1 \to V_2$ e $S : V_2 \to V_3$ transformações lineares. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras e quais são falsas?
   (a) Se $S \circ T$ é sobrejetora, então S é sobrejetora.
   (b) Se $S \circ T$ é sobrejetora então T é sobrejetora.
   (c) Se $S \circ T$ é injetora então S é injetora.
   (d) Se $S \circ T$ é injetora então T é injetora.

   Prove que se $V_1 = V_2 = V_3$ então todas as afirmações são verdadeiras.

3. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por
$$T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(1) & p'(1) \end{bmatrix}.$$
   Determine uma matriz $A \in M_4(\mathbb{R})$ tal que T possa ser vista como $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

4. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.
   (a) Determine os autovalores e autovetores de T_A.
   (b) Usando as informações do item (a) descreva T_A geometricamente, mostre que para todo $v \in \mathbb{R}^2$, $T_A(v)$ é a projeção ortogonal de v em uma reta de $\mathbb{R}^2$, qual é a reta?

5. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determine os autovalores de A.
   (b) Determine (se existir) uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T_A.
   (c) Determine (se existir) uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal.

6. Seja $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ tal que, para todo $i = 1, ...n$, a soma $a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{in} = 100$. Mostre que 100 é um autovalor de A.

7. Determine, se existirem, os autovalores e autovetores das seguintes transformações lineares $T_A$em que A é a matriz

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

   (g) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ (k) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

8. Para cada matriz do Exercício 7, determine, quando existir, uma matriz $P \in M_2(\mathbb{R})$ (ou $P \in M_3(\mathbb{R})$) tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

9. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostre que se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A então λ^k é um autovalor de A^k para todo $k \geq 1$.

10. Para que valores de θ a rotação de ângulo θ, cuja matriz em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ é

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

    é diagonalizável?

11. Por quê toda matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ onde n é **ímpar** tem pelo menos um autovalor real?

12. Mostre que a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ onde $b \neq 0$ não é diagonalizável.

13. Calcule A^{100} onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

14. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Mostre que A é diagonalizável. Mostre que autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais (em relação ao produto escalar).

15. Identifique e desenhe as cônicas a seguir

    (a) $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ (b) $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$ (c) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$.

16. **Verdadeiro ou Falso?** Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou exibindo um contra-exemplo.

    (a) Se uma matriz 3×3 tem 3 autovalores distintos então ela é diagonalizável.
    (b) Se A é uma matriz 2×2 de posto igual a 1 então A é diagonalizável.
    (c) Se A é uma matriz diagonalizável então o posto de A é igual ao número de autovalores distintos de A.
    (d) A matriz $\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, é sempre diagonalizável.
    (e) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é tal que A tem um autovalor nulo, então T_A não é injetora.
    (f) A matriz $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ é diagonalizável quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.
    (g) A matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ é diagonalizável quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.