MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear
Lista 4
2020

1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e sejam U e W subespaços de V.

   Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) $U \cap W = \{0\}$
   (b) $\dim U + W = \dim U + \dim W$.
   (c) Se B_U é uma base de U e B_W é uma base de W então $B_U \cup B_W$ é uma base de $U + W$.
   (d) Todo vetor $v \in U + W$ se escreve de modo **único** como $v = u + w$ onde $u \in U$ e $w \in W$.

2. Determine as coordenadas do vetor $v = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ em relação à base

$$B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}.$$

3. Verifique se as funções abaixo são ou não transformações lineares.

   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x,y,z) = (x, 2^y, 3^z)$;
   (b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, T(x,y,z,t) = (x-t, y-t, z-t, t)$;
   (c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, T(A) = (a_{11}, a_{22})$, onde $A = (a_{ij}), 1 \leq i,j \leq 2$;
   (d) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, T(A) = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
   (e) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, T(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_n, x_{n-1}, ..., x_2, x_1)$;
   (f) $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}), T(p(t)) = tp'(t)$ onde $p'(t)$ é a derivada de $p(t)$;
   (g) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, T(x,y,z) = (2x, 3y, 3z, 0)$;
   (h) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, T(x,y,z) = (2x-3y, 3y-4z, 4z-3x, 1)$;
   (i) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, T(x,y,z) = (x+y+z, x+y, x, 0)$;
   (j) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, T(x,y,z) = (\cos x, \operatorname{sen} y, z, 0)$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão do vetor $v = (x,y)$ em torno da reta $y = x$. Encontre a expressão de T e verifique que T é linear.

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(1,1,0) = (1,1), T(0,1,1) = (1,2)$ e $T(1,0,1) = (1,3)$. Determine $T(x,y,z), (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

6. Para as que forem transformações lineares no Exercício 3, determine $[T]_{can,can}$, isto é, determine a matriz de T em relação às bases canônicas dos espaços vetoriais.

7. Mostre que existe uma única transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(e_1) = (-1,2), T(e_2) = (1,-1), T(e_3) = (0,1)$. Escreva uma fórmula para $T(x,y,z)$.

8. Determine bases do **núcleo** e da **imagem** das transformações lineares.

   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, T(x,y,z) = (2x-y+z, -4x-8y-2z, x+y+z, x-y)$;
   (b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, T(z,y,z,t) = (4x+y-2z, 2x+y+z-4t, 6x-9z+9t)$.

NOTAÇÃO: Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Denote por $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $T_A(x_1,...,x_n) = (y_1,..y_m)$ onde $A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$.

9. Determine bases do **núcleo** e da **imagem** das transformações lineares T_A definidas pelas matrizes A abaixo.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$;

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

   (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

10. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, T(x,y,z,t) = (0,0,x,y)$. Mostre que Ker$T$ = ImT. Pode existir $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tal que Ker$T$ = ImT?

11. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal de $v = (x,y)$ na direção do vetor $u = (1,2)$, isto é, $T(x,y) = \frac{<(x,y),(1,2)>}{\|(1,2)\|^2}(1,2)$ onde $< >$ indica o produto escalar e $\| \;\|$ indica a norma do vetor.

    (a) Mostre que T é uma transformação linear;
    (b) Encontre uma expressão para $T(x,y)$.
    (c) Determine a matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $T = T_A$.
    (d) Determine Ker$T$ e ImT.
    (e) Desenhe em $\mathbb{R}^2$ o paralelogramo determinado pelos vetores $u = (1,1)$ e $v = (1,2)$. Desenhe a imagem do paralelogramo após aplicar T.
    (f) Desenhe a imagem do paralelogramo (do item anterior) após aplicar $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, para $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

12. **VERDADEIRO** ou **FALSO**? **JUSTIFIQUE!**

    (a) Toda transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ é injetora.
    (b) Toda transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ é sobrejetora.
    (c) Não existe transformação linear injetora $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.
    (d) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Então T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.
    (e) Não existe transformação linear sobrejetora $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.