MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear
Lista 3
2020

1. Determine uma base para cada subespaço W do espaço vetorial V. Determine $\dim W$.

   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x,y,z) \in V \mid x + 2y + z = 0 \text{ e } x - y + 2z = 0\}$.

   (b) $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V \mid AX = \mathbf{0}\}$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (c) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in V \mid p(1) = 0\}$.

   (d) $V = M_3(\mathbb{R})$ e $W = \{A = (a_{ij}) \in V \mid a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}$.

   (e) $V = M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $W = \{M \in V \mid AM = MA\}$.

   (f) $V = M_2(\mathbb{R})$, e $S = \{M \in V \mid M^t = -M\}$.

   (g) $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_4 = x_1 + x_2 \text{ e } x_3 = x_1 - x_2\}$.

   (h) $V = \mathbb{R}^6$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid x_2 = x_4 = x_6\}$.

   (i) $V = M_3(\mathbb{R})$ e W é o subespaço das matrizes tais que a primeira linha é igual à terceira.

2. Determine uma base do subespaço do espaço vetorial V gerado pelo conjunto S.

   (a) $V = \mathbb{R}^4$; $S = \{(1,2,1,0), (1,3,1,4), (2,1,0,0), (2,8,4,4)\}$;

   (b) $V = P_3(\mathbb{R})$; $S = \{t^2 - 2t^3, 1 + t^2 + t^3, 2 + 3t^2, 3 + 4t^2 + t^3\}$.

3. Verifique que os conjuntos dados são bases para os espaços V:

   (a) $\{(1,1), (1,3)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

   (b) $\{(1,0,1), (2,1,-1), (3,1,5)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

   (c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

4. Encontre uma base e a dimensão do espaço solução do sistema linear.

   (a) $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 & = & 0 \end{array} \right.$

   (b) $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$

   (c) $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 + x_5 & = & 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6 & = & 0 \\ x_4 + 3x_5 & = & 0 \end{array} \right.$

   (d) $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 & = & 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$

5. Ache uma base do espaço vetorial V contendo o conjunto S.

   (a) $V = M_2(\mathbb{R})$; $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$;

   (b) $V = \mathbb{R}^5$; $S = \{(1,1,0,2,2), (2,3,-1,0,1), (0,2,0,1,0)\}$.

6. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. **Verdadeiro** ou **Falso** ?

   (a) Se $A \subset B \subset V$ e B é LI então A é LI.

   (b) Se $A \subset B \subset V$ e A é LI então B é LI.

   (c) Se $\dim V = n$, então V pode ter um conjunto gerador com $n - 1$ vetores.

   (d) Se $\dim V = n$, então V pode ter um conjunto LI com $n + 1$ vetores.

   (e) Se $\dim V = n$, então V pode ter um conjunto gerador com $n + 1$ vetores.

7. Determine se as afirmações a seguir são **verdadeiras** ou **falsas**. **Justifique.** Prove a afirmação que for verdadeira e quando for falsa, explique a razão de ser falsa, através de um exemplo, se for esse o caso.

   (a) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset V$ tal que $\{v_2, v_3, v_4\}$ é LI e A é LD. Então o vetor v_1 pode ser escrito como combinação linear de v_2, v_3 e v_4.

   (b) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $A = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ tal que todos os subconjuntos de A com 2 elementos são LI. Então A é LI.

   (c) Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $S_1 = [(0,1,2), (1,2,3)]$ e $S_2 = [(2,3,4), (0,1,2), (1,1,1)]$. Então $S_1 = S_2$.

   (d) O conjunto de polinômios $A = \{1 + t, 1 + t^3, 1 + t^2 + t^3, 1 - t^2\}$ é uma base de $P_3(\mathbb{R})$.

8. Assinale **Verdadeiro** ou **Falso** quanto a validade da afirmação:

   "Se A e B são subconjuntos LI de um espaço vetorial V então $A \cup B$ é LI."

   (a) Sempre.

   (b) Nunca.

   (c) Se A e B são disjuntos.

   (d) Se um deles está contido no outro.

   (e) Se $[A] \cap [B] = \{0\}$.

   (f) Se $\dim[A] + \dim[B] = \dim V$.

9. Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Considere as linhas de A como vetores de $\mathbb{R}^n$ e as colunas de A como vetores de $\mathbb{R}^m$. Mostre que a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas de A é igual à dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas colunas de A.