

MAT0222 - Álgebra Linear II
2ª Prova - 16/05/2013

Nome : _____
 Nº USP : _____

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Atenção:

1. Leia os enunciados com atenção.
2. Justifique todas as suas afirmações.
3. BOA PROVA!

1. (1,5) Prove que duas matrizes reais da forma

$$\begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ a & \pi & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix},$$

com $a \neq 0$, são semelhantes.

Seja $A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ a & \pi & 0 \\ -b & c & 3 \end{bmatrix}$. Então $p_A(x) = (x - \pi)^2(x - 3)$.

$$(A - \pi I)(A - 3I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ -b & c & 3 - \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi - 3 & 0 & 0 \\ a & \pi - 3 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a(\pi - 3) & & \\ & & \end{bmatrix} \neq 0$$

pois $a \neq 0$ e $\pi - 3 \neq 0 \Rightarrow a(\pi - 3) \neq 0$.

Assim, o polinômio minimal de A , $m_A(x) = (x - \pi)^2(x - 3) = p_A(x)$.

Portanto, a forma de Jordan de A é

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \text{ independente de } b, c \text{ e } a \neq 0.$$

Assim toda matriz dessa forma tem a mesma forma de Jordan e então duas quaisquer delas são semelhantes.

2. (1,5) Seja M a matriz real,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine a forma de Jordan de M . JUSTIFIQUE!

Observação: O polinômio característico de M é

$$p_M(X) = (X - 1)^4.$$

Vamos determinar o polinômio mínimo de M

$$(M - I)(M - I) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$(M - I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo $N = M - I$ é nilpotente de índice 3 ($N^3 = 0$ e $N^2 \neq 0$).

$$4 = 3 + 1 \quad N \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e então } M \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. (1,5) Classifique, a menos de semelhança, as matrizes reais 8×8 com polinômio mínimo

$$m(X) = (X - 2)^2(X + 3)^3.$$

As possibilidades para o polinômio característico são:

$$(1) \quad p(x) = (x - 2)^2(x + 3)^6$$

$$(3) \quad p(x) = (x - 2)^4(x + 3)^4$$

$$(2) \quad p(x) = (x - 2)^3(x + 3)^5$$

$$(4) \quad p(x) = (x - 2)^5(x + 3)^3$$

$$(1) \quad 2 \text{ e } 6 = 3 + 3$$

$$2 \text{ e } 6 = 3 + 2 + 1$$

$$2 \text{ e } 6 = 3 + 1 + 1 + 1$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \boxed{2 \ 0} & \\ \hline \boxed{1 \ 2} & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}} \\ \\ \boxed{\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}} \end{array} \quad e \quad \left[\begin{array}{c|c} \boxed{2 \ 0} & \\ \hline \boxed{1 \ 2} & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}} \\ \\ \boxed{\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{array}} \\ \\ \boxed{-3} \end{array} \quad e \quad \left[\begin{array}{c|c} \boxed{2 \ 0} & \\ \hline \boxed{1 \ 2} & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}} \\ \\ \boxed{-3} \\ \\ \boxed{-3} \\ \\ \boxed{-3} \end{array}$$

(2) $3 = 2 + 1 \quad e \quad 5 = 3 + 2 + 1$
 $3 = 2 + 1 \quad e \quad 5 = 3 + 1 + 1 + 1$

$$\left[\begin{array}{c|c} \boxed{2 \ 0} & \\ \hline \boxed{1 \ 2} & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{2} \\ \\ \boxed{\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}} \\ \\ \boxed{\begin{array}{cc} -3 & 0 \\ 1 & -3 \end{array}} \end{array} \quad e \quad \left[\begin{array}{c|c} \boxed{2 \ 0} & \\ \hline \boxed{1 \ 2} & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{2} \\ \\ \boxed{\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}} \\ \\ \boxed{-3} \\ \\ \boxed{-3} \end{array}$$

(3) $4 = 2 + 2 \quad e \quad 4 = 3 + 1$
 $4 = 2 + 1 + 1 \quad e \quad 4 = 3 + 1$

$$\left[\begin{array}{c|c} \boxed{2 \ 0} & \\ \hline \boxed{1 \ 2} & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}} \\ \\ \boxed{\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}} \\ \\ \boxed{-3} \end{array} \quad e \quad \left[\begin{array}{c|c} \boxed{2 \ 0} & \\ \hline \boxed{1 \ 2} & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{2} \\ \\ \boxed{2} \\ \\ \boxed{\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}} \\ \\ \boxed{-3} \end{array}$$

(4) $5 = 2 + 2 + 1 \quad e \quad 3$
 $5 = 2 + 1 + 1 + 1 \quad e \quad 3$

$$\left[\begin{array}{c|c} \boxed{2 \ 0} & \\ \hline \boxed{1 \ 2} & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}} \\ \\ \boxed{2} \\ \\ \boxed{\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}} \end{array} \quad e \quad \left[\begin{array}{c|c} \boxed{2 \ 0} & \\ \hline \boxed{1 \ 2} & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{2} \\ \\ \boxed{2} \\ \\ \boxed{2} \\ \\ \boxed{\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}} \end{array}$$

4. (3,0) As seguintes afirmações são **verdadeiras** ou **falsas**?

Justifique, provando as afirmações verdadeiras, ou exibindo um contra-exemplo para as que forem falsas.

- (a) Seja V um espaço vetorial de dimensão $n > 1$ e seja $N \in L(V)$ um operador nilpotente de posto 1. Então $N^2 = 0$.
- (b) Se $A \in M_3(\mathbb{C})$ é uma matriz tal que $(A^2 + I)^2 = 0$ então A é diagonalizável.
- (c) Se V é um espaço vetorial de dimensão $n > 0$ e se $f_1, \dots, f_n \in V^*$ são tais que $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i \neq \{0\}$, então $\{f_1, \dots, f_n\}$ é LD.

(a) VERDADEIRA

Sendo posto $N = 1$ temos que $\dim \text{Ker } N = n - 1$.

Assim, a forma de Jordan de N tem $n - 1$

blocos $n = \underbrace{2}_1 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n-2}$

Logo, o maior bloco é de tamanho 2 e portanto $N^2 = 0$.

(b) FALSA

$$f(x) = (x^2 + 1)^2 = (x - i)^2 (x + i)^2$$

Como $f(A) = 0$, o polinômio mínimo de A é um divisor de $f(x)$.

Se $m_A(x) = (x - i)^2 (x + i)$ ou $m_A(x) = (x + i)^2 (x - i)$ temos que A NÃO é diagonalizável.
(pois $m_A(x)$ não é produto de fatores lineares distintos)

(c)

VERDADEIRA

Se, por absurdo, $\{f_1, \dots, f_n\}$ é LI, então $\{f_1, \dots, f_n\}$ é uma base de V^* , já que $n = \dim V = \dim V^*$.

Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ a base de V da qual ela é dual.

Então, se $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^n f_i(v) v_i$.

Portanto, se $v \in \bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i \Rightarrow f_i(v) = 0 \forall i$

$\Rightarrow v = 0$, absurdo, pois supusemos $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i \neq \{0\}$.

5. (2,5) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja $T \in L(V)$ um operador linear com n autovalores distintos $\lambda_i, i = 1, \dots, n$. Sejam $v_i, i = 1, \dots, n$ autovetores (não nulos) associados a λ_i (isto é, $T(v_i) = \lambda_i v_i$). Seja $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

(a) Prove que $B = \{v, Tv, \dots, T^{n-1}v\}$ é uma base de V .

(b) Prove que se $T^n(v) = a_0 v + a_1 Tv + \dots + a_{n-1} T^{n-1}v$ então o polinômio

$$f(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$$

é tal que $f(T) = 0$.

(c) Conclua que o polinômio $f(X)$ do item (b) é o polinômio minimal de T .

(d) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\dim V = 3$ e $-1, 1, 2$ são os autovalores distintos de T , qual é a matriz de T na base B , onde B é a base construída no item (a)?

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad v &= \sum_{i=1}^n v_i \\ T(v) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \\ T^k(v) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^k v_i \end{aligned}$$

Suponha agora que

$$x_1 v + x_2 Tv + \dots + x_n T^{n-1}v = 0, \quad x_i \in \mathbb{K}$$

$$\text{Então } x_1 \left(\sum_{i=1}^n v_i \right) + x_2 \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) + \dots + x_n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{n-1} v_i \right) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 + \lambda_1 x_2 + \dots + \lambda_1^{n-1} x_n) v_1 + \dots + (x_1 + \lambda_n x_2 + \dots + \lambda_n^{n-1} x_n) v_n = 0$$

Como T em n autovalores distintos e autovetores associados a autovalores distintos são LI e assim $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI.

$$\text{Logo } \begin{cases} x_1 + \lambda_1 x_2 + \dots + \lambda_1^{n-1} x_n = 0 \\ x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_2^{n-1} x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + \lambda_n x_2 + \dots + \lambda_n^{n-1} x_n = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Mas (*) é um sistema linear com n equações e n incógnitas e a matriz do sistema é a matriz de Vandermonde

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \text{ que tem determinante } \neq 0$$

já que os λ_i 's são distintos.

Assim a única solução de (*) é a trivial e o conjunto $\{v, Tv, \dots, T^{n-1}v\}$ é LI.
(portanto é uma base de V)

(b) Como $\{v, Tv, \dots, T^{n-1}v\}$ é uma base de V temos que existem escalares $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in V$ tais que $T^n(v) = a_0v + a_1Tv + \dots + a_{n-1}T^{n-1}v$.

Se $f(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1x - a_0$ é um polinômio tal que $f(T)v = 0$.
Temos que provar que $f(T)u = 0 \quad \forall u \in V$.

Seja $u \in V$. Então $u = \sum_{j=0}^{n-1} b_j T^j v$.

$$\text{Logo } f(T)u = \sum_{j=0}^{n-1} b_j f(T)(T^j v)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} b_j T^j (f(T)v) = 0.$$

(c) grau $f(x) = n$ e $m_T(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

Como $f(T) = 0$, o minimal de T é um divisor de $f(x)$. Como ambos são mônios e têm o mesmo grau, temos que $f(x) = m_T(x)$.

(d) $K = \mathbb{R}$ Como os autovalores distintos de T são $-1, 1, 2$, $m_T(x) = (x+1)(x-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Se $v = v_1 + v_2 + v_3$, $T(v_1) = -v_1$, $T(v_2) = v_2$ e $T(v_3) = 2v_3$, por

(a) temos que $B = \{v, Tv, T^2v\}$ é uma base de V .

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ já que } T(T^2v) = T^3v = a_0v + a_1Tv + a_2T^2v$$

onde $m_T(x) = x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0$.