

MAT0222 Álgebra Linear II

Lista 9 - 2013

Nesta lista o corpo $\mathbb{K}$ é sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ é chamada *ortogonal* se $AA^t = I_n$ e *unitária* se $AA^* = I_n$. Encontre um exemplo de uma matriz complexa unitária que não é ortogonal e um exemplo de uma matriz que é ortogonal e não é unitária.
2. Ache uma matriz simétrica *complexa* 2×2 que **não** é diagonalizável.
3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $T \in L(V)$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
 - (a) $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in V$.
 - (b) T é inversível e $T^* = T^{-1}$.
 - (c) Para todos $u, v \in V$, se $\|u\| = \|v\|$ então $\|Tu\| = \|Tv\|$.Tal T é chamado operador *unitário* se $K = \mathbb{C}$ e *ortogonal* se $K = \mathbb{R}$.
4. Seja T o operador linear em $\mathbb{C}^2$ (com o produto interno usual) definido por: $T(1, 0) = (1 + i, 2)$ e $T(0, 1) = (i, i)$. Ache a matriz de T^* em relação à base canônica de $\mathbb{C}^2$. Vale que $TT^* = T^*T$?
5. Seja T o operador linear em $\mathbb{C}^2$ (com o produto interno usual) definido por $T(1 + i, 0) = (1 + i, 2)$ e $T(i, 1) = (i, i)$. Ache a matriz de T^* em relação à base canônica de $\mathbb{C}^2$. Qual é a matriz de T^* em relação à base $\{(1 + i, 0), (i, 1)\}$?
6. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja T um operador linear em V que possui um adjunto T^* .
 - (a) Mostre que $\text{Ker} T^* = (\text{Im} T)^\perp$ e que $\text{Im} T^* \subset (\text{Ker} T)^\perp$.
 - (b) Mostre que se $\dim V < \infty$, então $\text{Im} T^* = (\text{Ker} T)^\perp$.
 - (c) Seja $V = C([0, 1], \mathbb{R})$ e T o operador linear definido por: $f \mapsto T(f)$, com $T(f)(t) = tf(t)$ para todo $t \in [0, 1]$. Ache T^* e mostre que $\text{Im} T^* \neq (\text{Ker} T)^\perp$.
7. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja T um operador linear em V . Prove que se T é inversível, então T^* é inversível e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
8. Seja $V = P_3(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Seja D o operador derivação. Ache D^* .
9. Seja T o operador linear em $\mathbb{C}^2$ (com o produto interno usual), cuja matriz em relação à base canônica é $a_{kj} = (i)^{k+j}$ para $1 \leq i, j \leq 2$. Ache T^* e uma base para $\text{Ker} T^*$.
10. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja T um operador linear em V . Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
 - (a) $T^* = T$.
 - (b) $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$ para todo $u, v \in V$.
 - (c) T pode ser representado por uma matriz autoadjunta em relação a uma base ortonormal de V .

(Um operador linear em V que tem uma das (e portanto TODAS as) propriedades acima é chamado *autoadjunto* ou *hermitiano*, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e *simétrico*, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.)

11. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor de T . Prove que:

(a) Se T é autoadjunto então $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Se T é unitário então $|\lambda| = 1$.

12. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle , \rangle$. Seja E um operador linear em V tal que $E^2 = E$ e tal que E possui um adjunto E^* . Prove que E é autoadjunto se, e somente se $EE^* = E^*E$. Prove também que, neste caso, E é a projeção ortogonal em $W = \text{Im}E$.

13. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $\langle , \rangle$ e seja T um operador linear em V . Prove que T é autoadjunto se, e somente se $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $v \in V$.

14. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $\langle , \rangle$ e seja T um operador linear em V . Prove que se $\langle Tv, v \rangle = 0$ para todo $v \in V$, então $T = 0$. Dê um exemplo para mostrar que o mesmo resultado não é necessariamente verdadeiro se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

15. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle , \rangle$ e seja T um operador linear em V que admite um adjunto. Prove que se $TT^* = T^*T$ então $\|Tv\| = \|T^*v\|$ para todo $v \in V$.

16. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $\langle , \rangle$ e seja T uma função de V em V tal que para todo $u, v \in V$ tem-se que $\|Tu - Tv\| = \|u - v\|$ e $T(iv) = iTv$. Prove que T é linear e que $\|Tv\| = \|v\|$ para todo $v \in V$.

17. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle , \rangle$ e seja T um operador linear em V tal que T admite um adjunto. Prove que se $T^*T = 0$ então $T = 0$.

18. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$. Mostre que A se escreve de modo único como $A = B + iC$, onde B e C são matrizes autoadjuntas.

19. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz autoadjunta. Mostre que $A + iI_n$ é inversível e que $U = (A + iI_n)^{-1}(A - iI_n)$ é unitária. A matriz U é chamada *transformada de Cayley de A* .

20. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Prove que $A + iB \in M_n(\mathbb{C})$ é unitária se, e somente se a matriz

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

é ortogonal.

21. Mostre que toda matriz (real) 2×2 ortogonal tem a forma $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ para algum $\theta \in \mathbb{R}$.