MAT0222-Álgebra Linear II

Lista 7 - 2013

Nesta lista o corpo $\mathbb{K}$ sempre será $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle\, ,\, \rangle$.

   (a) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mostre que para $u, v \in V$, $\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

   (b) Mostre que (a) é falso se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

   (c) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mostre que para $u, v \in V$, $\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \|\alpha u + \beta v\|^2 = \|\alpha u\|^2 + \|\beta v\|^2$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle\, ,\, \rangle$. Mostre que vale a *lei do paralelogramo*:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

   para todo $u, v \in V$.

3. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle\, ,\, \rangle$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mostre que para $u, v \in V$, $\|u\| = \|v\|$ se, e somente se, $u + v$ e $u - v$ são ortogonais. Discuta a afirmação para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, com produto interno $\langle\, ,\, \rangle$. Mostre que para todo $u, v \in V$, vale a *identidade de polarização*:

$$4\,\langle u, v\rangle = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2.$$

   Mostre que se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ então vale, para todo $u, v \in V$ a *identidade de polarização*:

$$4\,\langle u, v\rangle = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2.$$

5. Ache uma base ortonormal de cada um dos seguintes subespaços S e determine também, em cada caso, o subespaço $S^{\perp}$.

   (a) S é o subespaço de $\mathbb{C}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 0, i)$ e $v_2 = (2, 1, 1+i)$,com o produto interno usual.

   (b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, com o produto interno usual.

   (c) $S = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \mid xp'(x) = p(x)$ e $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

   (d) $S = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid tr(A) = 0\}$ e $\langle A, B\rangle = trAB^t$.

6. Seja $V = M_3(\mathbb{C})$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = trAB^*$. Ache $W^\perp$, onde W é o subespaço de V constituído pelas matrizes diagonais.

7. Seja $V = C([-1,1])$ com o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Seja W o subespaço de V formado pelas funções pares, isto é, $W = \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\, \forall x \in [-1,1]\}$. Ache $W^\perp$.

8. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle\, , \,\rangle$. Seja $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V e sejam $c_1, c_2, ..., c_n$, n escalares quaisquer. Mostre que existe um único vetor $v \in V$ tal que $\langle v, v_j\rangle = c_j$ para todo $j = 1, 2, ..., n$.

9. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle\, , \,\rangle$. Prove que se

$$|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|,$$

então u e v são linearmente dependentes.

10. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle\, , \,\rangle$ e seja W um subespaço de V. Seja $v \in V$. Um vetor $w \in W$ é uma **melhor aproximação para** v **por vetores em** W se $\|v - w\| \leq \|v - u\|$ para todo $u \in W$. Prove que:

(a) O vetor $w \in W$ é uma melhor aproximação para $v \in V$ por vetores em W se, e somente se, $v - w \in W^\perp$.

(b) Se uma melhor aproximação para $v \in V$por vetores em W existe, então ela é única.

(c) Se dim$W < \infty$ então existe uma melhor aproximação para $v \in V$ por vetores em W e ela é dada por

$$w = \sum_{i=1}^{k} < v, e_i > e_i,$$

onde $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ é uma base ortonormal qualquer de W.

Quando tal vetor w existe, (ele é único) é chamado **projeção ortogonal de** v **em** W.

11. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle\, , \,\rangle$ e seja W um subespaço de V. Seja $v \in V$. Seja $E : V \to V$ a função tal que $Ev = w$ = projeção ortogonal de v em W.(Assuma que para todo $v \in V$ existe tal w.) Prove que:

(a) E é um operador linear em V.

(b) E é idempotente.

(c) ImE = W e Ker$E$ = $W^\perp$.

(d) $V = W \oplus W^\perp$.

12. Conside $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e seja W o subespaço gerado pelos vetores $(1, -1, 1)$ e $(1, 1, 1)$. Encontre o operador linear E (do exercício anterior), ache a matriz de E na base canônica de $\mathbb{R}^3$.

13. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \, , \, \rangle$ e seja W um subespaço de dimensão finita de V. Mostre que $(W^\perp)^\perp = W$. O resultado continua verdadeiro se a dimensão de W não é finita?

14. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \, , \, \rangle$, W um subespaço de dimensão finita de V e E a projeção ortogonal de V em W. Prove que $\langle Ev, u \rangle = \langle v, Eu \rangle$ para todo $u, v \in V$.

15. Seja $V = C([0, 1])$ com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

    (a) Ache uma base ortonormal do subespaço de V gerado pelos polinômios $1, x$ e x^2.

    (b) Ache o polinômio de grau menor ou igual a 2 que melhor aproxima $f(x) = \cos x$ no intervalo $[0, 1]$.

16. Seja $V = C([0, 2\pi])$ com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

    Seja

$$S = \{1, \cos(nx), \mathrm{sen}(mx), m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

    (a) Prove que S é um conjunto ortogonal de V.

    (b) Seja

$$f(x) = \begin{cases} \pi, \text{ se } 0 \leq x \leq \pi \\ x, \text{ se } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

    Ache a função da forma $g(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \mathrm{sen} x + a_2 \cos(2x) + b_2 \mathrm{sen}(2x)$ que melhor aproxima f no intervalo $[0, 2\pi]$.

17. Determine:

$$\min_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \mathrm{d}x.$$

    (Resposta: $\frac{1}{180}$.)