

MAT0222 Álgebra Linear II
Lista 6
2013

1. Prove que duas matrizes complexas 3×3 são semelhantes se, e somente se, têm o mesmo polinômio característico e o mesmo polinômio minimal. Dê um exemplo para mostrar que o mesmo resultado já não vale para matrizes 4×4 .
2. Classifique, a menos de semelhança, as matrizes reais 6×6 com polinômio minimal $(X - 1)^2(X + 1)(X - 2)$.
3. Determine quais das matrizes seguintes são semelhantes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 13 & -16 & 2 & -1 \\ -9 & -13 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -6 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & -8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Classifique, a menos de semelhança, todas as matrizes 6×6 nilpotentes.
5. Sejam N_1 e N_2 matrizes 6×6 nilpotentes com o mesmo polinômio minimal e o mesmo posto. Mostre que elas são semelhantes. Mostre que o mesmo resultado já não vale para matrizes 7×7 .
6. Sejam $n \geq 2$ e N uma matriz $n \times n$ nilpotente, com $N^{n-1} \neq 0$. Prove que N não tem uma raiz quadrada, isto é, não pode existir uma matriz A tal que $A^2 = N$.
7. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ache a forma de Jordan J de A e encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = J$.

8. Seja V um espaço vetorial de dimensão n , com $n \geq 2$ e seja T um operador linear em V de posto 2. Determine todas as possíveis formas de Jordan de T .
9. Seja $T : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ o operador linear definido por $T(p(X)) = p(X + 1)$.
 - (a) Determine a forma de Jordan de T .
 - (b) Se $n = 4$, encontre uma base B de $P_n(\mathbb{R})$ tal que $[T]_B$ esteja na forma de Jordan.
10. Determine o número de matrizes não semelhantes A em $M_6(\mathbb{R})$ satisfazendo $(A - 2I_6)^3 = 0$.
11. Mostre que as matrizes complexas

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

são semelhantes.

12. Seja $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ um operador linear com polinômio característico $p_T(X) = (X - a)^3(X - b)^3$ e polinômio minimal $m_T(X) = (X - a)^2(X - b)$ e $a \neq b$. Ache a forma de Jordan de T .

13. Classifique, a menos de semelhança, todas as matrizes reais 7×7 com polinômio característico $p_T(X) = (X - 1)^4(X - 2)^2(X - 1)$.

14. Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ache a forma de Jordan J de A e encontre uma matriz $P \in M_5(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = J$.

15. Mostre que toda matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ é semelhante à sua transposta.

16. Classifique, a menos de semelhança, todas as matrizes complexas 3×3 tais que $A^3 + I_3 = 0$.