MAT0222 Álgebra Linear II
Lista 5
2013

1. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$
É A diagonalizável? E se considerarmos $A \in M_3(\mathbb{C})$?

2. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$
Calcule A^{2013}.

3. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T \in L(V)$ tal que $T^2 = T$.
(a) Prove que $V = KerT \oplus ImT$.
(b) É T diagonalizável? Por que?

4. Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ e seja $T : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ o operador linear definido por $T(M) = M^t$. Mostre que T é diagonalizável.

5. Mostre que se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é diagonalizável, então a matriz A^m é diagonalizável qualquer que seja o número natural m, $m \geq 1$.

6. Exiba uma matriz A *não diagonalizável* tal que a matriz A^2 seja *diagonalizável.*
Sugestão: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

7. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T \in L(V)$ um operador linear que é diagonalizável e nilpotente ao mesmo tempo. Prove que $T = 0$.

8. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T \in L(V)$ de posto 1. Prove que *ou* T é diagonalizável *ou* T é nilpotente.

9. Seja $a \neq 0$ e seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ a matriz $A = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = a$ para todo $i, j = 1, 2, ..., n$. Prove que A é diagonalizável. Qual é o polinômio minimal de A?

10. Verifique que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

11. Seja $A \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ a matriz $A = (a_{i1})_{1 \leq i \leq n}$. É AA^t diagonalizável?

12. Ache os polinômios característico e minimal de cada um das matrizes abaixo. Verifique se elas são ou não diagonalizáveis como matrizes *reais* e como matrizes *complexas*.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

13. Determine todos os valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ para os quais a matriz A abaixo seja diagonalizável.
$$A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica (isto é $A^t = A$). Mostre que A é diagonalizável.

15. Encontre todas as possibilidades para o polinômio minimal de um operador linear $T \in L(\mathbb{R}^5)$ com polinômio característico:

    (a) $p_T(X) = (X-2)^5$
    (b) $p_T(X) = X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$
    (c) $p_T(X) = (X-1)^2(X-2)^3$

    Em quais casos T é diagonalizável?

16. Seja $T \in L(V)$ um operador diagonalizável e seja W um subespaço de V invariante sob T. Prove que a restrição de T a W, $T_W \in L(W)$ é diagonalizável.

17. Seja $T \in L(V)$ um operador linear tal que todo subespaço de V é invariante sob T. Mostre que T é um múltiplo do operador identidade.

18. Seja $T \in L(V)$ um operador linear e W um subespaço de V. Prove que W é invariante sob T se, e somente se, W° é invariante sob T^t.

19. Seja $T \in L(C([-1,1]))$ o operador linear dado por

    $$T(f)(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt, \text{para toda } f \in C([-1,1]).$$

    Quais dos seguintes subespaços W de $C([0,1])$ são invariantes sob T?
    (a) W é o subespaço constituído pelas funções polinomiais.
    (b) $W = \{f \in C([-1,1]) \mid f(0) = 0\}$.
    (c) $W = \{f \in C([-1,1]) \mid f(x) = f(-x)\ \forall x \in [-1,1]\}$.
    (d) W é o subespaço constituído pelas funções deriváveis no intervalo $]-1,1[$.

20. *Veradeiro ou Falso?* Se uma matriz triangular A é semelhante a uma matriz diagonal, então A já é diagonal.

21. *Veradeiro ou Falso?* Se os únicos autovalores de um operador diagonalizável T são 0 e 1, então T é uma projeção.

22. Seja $T \in L(V)$ um operador linear com $n = \dim V$ autovalores distintos.
    (a) Prove que todo operador linear que comuta com T é um polinômio em T.
    (b) Prove que V tem exatamente 2^n subespaços invariantes sob T e determine-os.

23. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e seja $T \in L(V)$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
    (a) T é diagonalizável e $T^{2n} = T^n$.
    (b)$T^{n+1} = T$.

24. Seja $E \in L(V)$ uma projeção e $p(x) \in K[x]$ um polinômio. Então $p(E) = aI + bE$. Determine a e b em termos dos coeficientes de $p(x)$.

25. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base de V. Seja $T : V \to V$ o operador linear dado por

    $$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

    (a) Mostre que os subespaços $[v_1, v_2]$ e $[v_3, v_4]$ são invariantes sob T.
    (b) Verifique que T não tem autovetores.