

MAT0222 Álgebra Linear

Lista 4

2013

1. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $w_1 = (1, 0, -2, 1)$ e $w_2 = (1, 2, 3, 1)$. Determine W° e ache um sistema de equações lineares homogêneo que tenha W como espaço solução.
2. Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V . Prove que $U = W$ se, e somente se, $U^\circ = W^\circ$.
3. Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial de dimensão finita V . Prove que:
 - (a) $(U + W)^\circ = U^\circ \cap W^\circ$.
 - (b) $(U \cap W)^\circ = U^\circ + W^\circ$.

4. Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V tais que $V = U \oplus W$. Prove que

$$V^* = U^\circ \oplus W^\circ.$$

5. Seja $V = P_3(\mathbb{C})$ e seja W o subespaço de V constituído pelos polinômios que são múltiplos do polinômio $x^2 + 1$.
 - (a) Ache uma base de W° .
 - (b) Mesma pergunta do item (a), só que com $\mathbb{R}$ no lugar de $\mathbb{C}$.
6. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e sejam $f_1, f_2, \dots, f_n \in V^*$. Mostre que $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ é LD se, e somente se, existe $0 \neq v \in V$ tal que $f_i(v) = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.
7. Seja $f \in (\mathbb{C}^2)^*$ definida por $f(z, w) = z + iw$. Determine $T^t(f)$ para $T \in L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ dada por:

- (a) $T(z_1, z_2, z_3) = (z_1 + z_2, z_2 + z_3)$

- (b) $T(z_1, z_2, z_3) = (z_1 + z_2, 2z_2 - z_3)$

8. Seja n um inteiro positivo e seja $V = P_n(\mathbb{R})$. Seja $D \in L(V)$ o operador derivação. Determine D^t . Determine também T^t , onde $T \in L(V)$ é o operador linear definido por $T(p(x)) = p(x+1)$ para todo $p \in V$. Determine também uma base de $\text{Ker} D^t$ e de $\text{Ker} T^t$.
9. Seja n um inteiro positivo e seja $V = P_n(\mathbb{R})$. Sejam a e b números reais fixos, com $a < b$, e defina $f \in V^*$ por

$$f(p) = \int_a^b p(x) dx.$$

Se D é o operador derivação, o que é $D^t(f)$?

10. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz fixa e seja $T_A \in L(M_n(\mathbb{K}))$ o operador linear definido por $T_A(M) = AM - MA$. Se tr é o funcional traço, descreva $(T_A)^t(\text{tr})$.
11. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja $T \in L(V)$. Suponha que existe um escalar α e um vetor não nulo $v \in V$ tal que $Tv = \alpha v$ (isto é, α é um **autovalor** de T). Mostre que existe um funcional linear não nulo $f \in V^*$ tal que $T^t(f) = \alpha f$. Vale a recíproca? A afirmação continua sendo verdadeira se a dimensão de V não for finita?
12. Seja A uma matriz $m \times n$ com coeficientes **reais**. Mostre que $A = 0$ se, e somente se, $\text{tr} A^t A = 0$.
13. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Mostre que a função $T \mapsto T^t$ é um isomorfismo de $L(V)$ em $L(V^*)$.