MAT0222 Álgebra Linear II
Lista 3
2013

1. Considere a base $B = \{(1,-1,0),(1,1,1),(0,i,i)\}$, de $\mathbb{C}^3$. Ache a base B^*, dual da base B.

2. Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$. Mostre que $\{M \in M_n(\mathbb{K})$ tais que tr$M = 0\}$ é igual ao subespaço de $M_n(\mathbb{K})$ gerado pelas matrizes da forma $AB - BA$, $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

   [**Sugestão:** Mostre que as matrizes $E_{ii} - E_{jj}$ e E_{ij} com $j \neq i$ são da forma $AB - BA$, com $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Considere o funcional linear tr: $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definido por tr(M) =traço M.]

3. Seja $V = P_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 2 com coeficientes reais. Defina três funcionais lineares em V por:
$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x,\ f_2(p) = \int_0^2 p(x)\mathrm{d}x,\ f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)\mathrm{d}x, \text{para todo } p \in V.$$
   Mostre que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base de V^* e encontre a base de V da qual ela é dual.

4. Seja $V = P_3(\mathbb{R})$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Defina $f_i \in V^*$, $i = 1,2,3,4$ por:
$$f_1(p) = p(a),\ f_2(p) = p'(a),\ f_3(p) = p(b),\ f_4(p) = p'(b), \text{para todo } p \in V.$$
   Determine uma condição necessária e suficiente para que $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ seja uma base de V^* e nesse caso ache a base de V da qual ela é dual.

5. Seja n um inteiro positivo e seja $V = P_n(\mathbb{K})$. Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n$ elementos **distintos** de $\mathbb{K}$. Defina, para cada $i = 0, \ldots, n$, os funcionais $f_i \in V^*$ por $f_i(p) = p(a_i)$, para todo $p \in V$. Mostre que $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ é uma base de V^* e encontre a base de V da qual ela é dual.

6. Seja n um inteiro positivo e seja $V = P_n(\mathbb{R})$. Defina os funcionais lineares $\phi_k, k = 0, ..., n$ por
$$\phi_k(p) = \int_{-1}^1 x^k p(x)\mathrm{d}x, \quad \text{para todo } p \in V.$$
   (a) Mostre que $B^* = \{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ é uma base de V^*.
   (b) No caso $n = 2$, ache a base B de V da qual B^* é dual.

7. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja $0 \neq f \in V^*$ um funcional linear. Mostre que existe $0 \neq v_0 \in V$ tal que $V = \mathrm{Ker} f \oplus \mathbb{K} v_0$.

8. Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ um corpo e seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Sejam f e g funcionais lineares em V. Suponha que a função h definida por $h(v) = f(v)g(v)$ é um funcional linear. Prove que $f = 0$ ou $g = 0$.

9. Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ e seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Se $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são vetores de V, cada um deles diferente do vetor nulo, prove que existe um funcional linear $f \in V^*$ tal que$f(v_i) \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$.

10. Prove que o funcional *traço* em $V = M_n(\mathbb{K})$, com $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, é único no seguinte sentido: "Se $f \in V^*$ é tal que $f(AB) = f(BA)$ para todas matrizes $A, B \in V$, então existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $f = \alpha \mathrm{tr}$. Se, alem disso, $f(I_n) = n$, então $f = \mathrm{tr}$."

11. Sejam $f_1, f_2, ..., f_m \in (\mathbb{K}^n)^*$. Defina $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ por

$$T(v) = (f_1(v), f_2(v), ..., f_m(v)).$$

Mostre que T é uma transformação linear. Mostre também que se $T \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ então existem $f_1, f_2, ..., f_m \in (\mathbb{K}^n)^*$ tais que $T(v) = (f_1(v), f_2(v), ..., f_m(v))$ para todo $v \in \mathbb{K}^n$.

12. Seja $V = P(\mathbb{R})$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ defina $f_\alpha \in V^*$ por $f_\alpha(p(x)) = p(\alpha)$. Mostre que $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ é LI em V^*. Conclua que uma base de V^* é não enumerável!

13. Seja $V = M_n(\mathbb{K})$.

    (a) Seja $B \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz fixa. Defina $f_B : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ por $f_B(A) = \mathrm{tr}(B^t A)$ onde B^t é a matriz transposta de B. Prove que $f_B \in V^*$.

    (b) Mostre que para todo $f \in V^*$ existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $f = f_B$.

    (c) Mostre que $B \mapsto f_B$ é um isomorfismo de V em V^*.