MAT0222-Álgebra Linear II
Lista 2
2013

1. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Em cada caso, prove a afirmação ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T \to W$ uma transformação linear.

   (a) Se $\dim V = 6$, $\dim W = 4$ e $\dim \mathrm{Ker} T = 2$ então T é sobrejetora.

   (b) Se T é sobrejetora então $\dim V \geq \dim W$.

   (c) Se $\dim V \geq \dim W$ então T é sobrejetora.

   (d) Se T é injetora e $\dim V = \dim W = n$ então $\mathrm{Im} T = W$.

2. Seja $T : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definida por $T(A) = \mathrm{tr} A$. Mostre que $\dim \mathrm{Ker} T = n^2 - 1$.

3. Seja A uma matriz $n \times n$. Sejam

$$U = \{B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \mid BA = 0\}$$

   e

$$W = \{BA \mid B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})\}.$$

   Mostre que U e W são subespaços de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e que $\dim U + \dim W = mn$.

4. Construa uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Ker} T = \mathrm{Im} T$.

5. Seja V um espaço vetorial de dimensão ímpar. Mostre que não existe $T : V \to V$ tal que $\mathrm{Im} T = \mathrm{Ker} T$.

6. Seja $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ com $v_1 = (1, i)$ e $v_2 = (-i, 2)$. Ache as matrizes: $[T]_{can,B}$, $[T]_{B,can}$, $[T]_{can}$ e $[T]_B$. (Aqui *can* designa a base canônica de $\mathbb{C}^2$.)

7. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz fixa e seja $T_A : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ definida por

$$T_A(M) = AM - MA.$$

   Prove que T_A é uma transformação linear.

8. Exiba uma função $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que seja $\mathbb{R}$ - linear mas que não seja $\mathbb{C}$ - linear.

9. Seja $0 \neq w \in \mathbb{C}$ um número complexo. Defina $T_w : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $T_w(z) = wz$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Prove que T_w é $\mathbb{R}$-linear e se $n \in \mathbb{Z}$, ache a matriz de $(T_w)^n$ na base $B = \{1, i\}$ de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

10. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita. Sejam $T : V \to W$ e $S : W \to V$ transformações lineares. Mostre que se $\dim V > \dim W$ então a composta $S \circ T$ não é inversível.

11. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ linear tal que posto(T^2) = posto(T). Prove que $\mathrm{Ker} T \cap \mathrm{Im} T = \{0\}$.

12. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ linear. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
(a) KerT^2 =Ker$T$; (b) ImT^2 =ImT; (c)V =Ker$T \oplus$ImT (d) V =Ker$T$+ImT; (e)$\{0\}$ =Ker$T \cap$ImT.

13. Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Prove que as matrizes

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

são matrizes semelhantes em $M_n(\mathbb{C})$.

14. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja $P \in L(V)$ uma **projeção**, isto é, $P^2 = P$. Prove que $V = \text{Ker}P \oplus \text{Im}P$. Mostre também que $I - P$ também é uma projeção e que $\text{Ker}(I - P) = \text{Im}P$ e $\text{Im}(I - P) = \text{Ker}P$.

15. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ e seja $P \in L(V)$ uma projeção. Prove que o traço de P é um número inteiro que é igual ao posto de P.

16. Seja V um espaço vetorial de dimensão 2 sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja T um operador linear em V tal que $T^2 = I$. Prove que ou $T = I$, ou $T = -I$, ou existe uma base B base de V tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

17. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ e seja T um operador linear em V tal que $T^2 = I$. Seja $W = \{v \in V \text{ tais que } Tv = v\}$ e $U = \{v \in V \text{ tais que } Tv = -v\}$. Prove que $V = W \oplus U$.

18. Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja T um operador linear em V tal que $T^n = 0$ e $T^{n-1} \neq 0$. Seja $v \in V$ tal que $T^{n-1}v \neq 0$. Prove que o conjunto

$$B = \{v, Tv, T^2v, ..., T^{n-1}v\}$$

é uma base de V. Qual é a matriz $[T]_B$?

19. Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e sejam S e T dois operadores lineares em V. Suponha que $S \circ T = 0$ e que $S + T$ é sobrejetora. Mostre que

$$\text{posto}T + \text{posto}S = n.$$

20. Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ um corpo. Mostre que não existem matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ tais que $AB - BA = I_n$ ou com $AB - BA = E$, com $E \neq 0$ e $E^2 = E$.

21. Seja T um operador linear de posto 1 em um espaço vetorial V. Mostre que existe um único escalar α tal que $T^2 = \alpha T$. Prove que se $\alpha \neq 1$, então $I - T$ é inversível.

22. Seja $\mathbb{K} \in \mathbb{C}$ e sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ matrizes idempotentes. É a seguinte afirmação verdadeira? " As matrizes A e B são semelhantes se, e somente se, elas têm o mesmo traço."

23. *Verdadeiro ou Falso?* Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Suponha que $\dim V = n$ e $\dim U = m$, com $m > n$. Sejam $T \in L(U, V)$ e $S \in L(V, U)$. Então $S \circ T$ e $T \circ S$ não são inversíveis.