MAT0222- Álgebra Linear II
Lista 10
2013

Nesta lista o corpo $\mathbb{K}$ é sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$.

1. Seja $T \in L(V)$. Prove que se W é um subespaço de V invariante sob T, então $W^\perp$ é invariante sob T^*.

2. Sejam $S, T \in L(V)$.

   (a) Mostre que se S e T são autoadjuntas, então ST é autoadjunta se, e somente se, $ST = TS$.

   (b) Prove que T^*T é autoadjunta.

   (c) Se T é autoadjunta, mostre que S^*TS é autoadjunta.

3. Seja $T \in L(V)$ normal e nilpotente. Mostre que T é o operador nulo.

4. Sejam V de dimensão finita, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $T \in L(V)$ um operador normal. Prove que:

   (a) T é autoadjunto se, e somente se, todo autovalor de T é um número real.

   (b) T é unitário se, e somente se, todo autovalor de T é um número complexo de módulo igual a 1.

   (c) T é o operador nulo se, e somente se todos os autovalores de T são nulos.

   (d) $T^* = -T$ se, e somente se, os autovalores de T são nulos ou números complexos imaginários puros.

5. Um operador linear $T \in L(V)$ é **não negativo** (**positivo**) se T é autoadjunto e $\langle Tv, v\rangle \geq 0$ ($\langle Tv, v\rangle > 0$) para todo $v \in V$. Se a dimensão de V é finita e T é não negativo, mostre que as autovalores de T são números reais não negativos. Mostre que T é não negativo se, e somente se, existe $S \in L(V)$ tal que $T = S^*S$.

6. Prove que se $\dim V$ é finita e $T \in L(V)$ é um operador positivo e unitário, então $T = I$.

7. Suponha que $\dim V$ é finita e seja $T \in L(V)$ um operador linear não negativo. Prove que se $v \in V$ é tal que $\langle Tv, v\rangle = 0$, então $Tv = 0$.

8. Prove que toda matriz positiva é quadrado de uma matriz também positiva.

9. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $A^* = A$. Mostre que existe um número real positivo c tal que $A + cI$ é positiva.

10. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ ($A \in M_n(\mathbb{R})$) uma matriz inversível. Prove que $A = BC$, onde B é unitária (ortogonal) e C é positiva. Mostre também que esta decomposição é única.
(*Sugestão:* Escreva $A^*A = D^2$ e considere $B = D^{-1}A$.)

11. Dê exemplo de uma matriz A tal que A^2 é normal, mas A não é normal.

12. Seja $T \in L(V)$ normal. Prove que se W é invariante sob T, então $W^\perp$ é invariante sob T.

13. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$
Ache uma matriz ortogonal $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $P^t AP$ é diagonal.

14. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Prove que existe uma matriz real C tal que $C^3 = A$.

15. Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_k \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes simétricas tais que $A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_k^2 = 0$. Prove que $A_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, k$.

16. Seja $\mathcal{O}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ é ortogonal}\}$.

    (a) Mostre que $|\det A| = 1$ para toda $A \in \mathcal{O}(n)$.

    (b) Mostre que $|\mathrm{tr} A| \leq n$ para toda $A \in \mathcal{O}(n)$.

17. *Verdadeiro ou Falso?*

    (a) Se A é uma matriz real simétrica, então existe uma matriz real B tal que $A = B^t B$.

    (b) Duas matrizes reais simétricas são semelhantes se, e somente se, têm o mesmo polinômio característico.

FORMAS QUADRÁTICAS

Nos exercícios a seguir, o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

18. Seja U uma matriz $n \times n$ inversível e $A = U^t U$. Mostre que a forma quadrática definida por $q(X) = X^t AX$, onde X é um vetor coluna de $\mathbb{R}^n$, é positiva definida.

19. Em cada caso, se $q(X) = X^t BX$ para todo $X \in \mathbb{R}^n$, ache uma matriz simétrica A tal que $q(X) = X^t AX$ para todo X.

$$\text{(a) } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b) } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

20. Em cada caso, ache uma mudança de variáveis que diagonaliza a forma quadrática q e expresse q em termos das novas variáveis.

    (a) $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$.

    (b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$.

21. Se A é positiva definida, mostre que todo elemento da diagonal de A é positivo.
[**Sugestão:** Calcule $E_j^t AE_j$, onde E_j é a j-ésima coluna da matriz identidade.]

22. Seja A uma matriz $m \times n$.

    (a) Mostre que $A^t A$ é positiva definida se e somente se as colunas de A são independentes.

    (b) Mostre que $\lambda \geq 0$ para todo autovalor λ de $A^t A$.