MAT0222 Álgebra Linear
Lista 1
2013

1. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta!

   (a) Todo subconjunto não vazio de um subconjunto LI de vetores também é LI.

   (b) Se $\{u, v\}$ e $\{w, z\}$ são subconjuntos LI de um espaço vetorial V então $\{u, v, w, z\}$ também é LI.

   (c) Se $\{u, v, w, z\}$ é um subconjunto LI de um espaço vetorial V então
   $$\{u + v, v + w, w + z, z + u\}$$
   também é LI.

   (d) Se $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ é um conjunto LD de vetores então v_m é uma combinação linear de $v_1, ..., v_{m-1}$.

   (e) Se V é um espaço vetorial de dimensão n então todo subconjunto LI com n vetores é uma base de V.

   (f) Seja$V$ o espaço vetorial $\mathfrak{F}([1, 2], \mathbb{R})$ e seja $n > 0$ um número inteiro. Então o conjunto $\{\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, ..., \frac{1}{x^n}\} \subset V$ é LI

   (g) Se $n > 1$ e $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz tal que $A^3 = 0$ e $A^2 \neq 0$ então $\{I, A, A^2\}$ é LI.

2. Seja
   $$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$
   Prove que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um corpo. Prove também que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial. Exiba uma base desse espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

3. Sejam $\mathbb{L}$ e $\mathbb{K}$ corpos tais que $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$. Mostre que $\mathbb{L}$ pode ser visto como um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Isso é uma generalização de exercício anterior.

4. Ache uma base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$. Ache também uma base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ e uma base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

5. Considere $\mathbb{C}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $w \in \mathbb{C}$ tal que $w \notin \mathbb{R}$. Mostre que $\{w, w^2\}$ é uma base de $\mathbb{C}$. Mostre também que se $w \in \mathbb{C}$ não é real e nem imaginário puro então $\{w, \overline{w}\}$ é uma base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

6. Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão n e seja $\{v_1, v_2, ...v_n\}$ uma base de V. Mostre que o conjunto $\{v_1, v_2, ...v_n\} \cup \{iv_1, iv_2, ...iv_n\}$ é uma base de V quando considerado como $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

7. Determine uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$ constuído pelas soluções do sistema linear
   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 5z & + & 3w & = & 0 \\ 4x & + & 4y & + & 10z & + & 3w & = & 0 \end{array}\right.$$

8. Encontre uma base de $M_2(\mathbb{R})$ formada por matrizes que satisfazem $A^2 = A$.

9. Encontre uma base de $P_2(\mathbb{R})$ formada por polinômios $a + bx + cx^2$ tais que $a + b + c = 2$. É possível encontrar uma base de $P_2(\mathbb{R})$ formada por polinômios que satisfazem $a + b + c = 0$?

10. Mostre que o conjunto $\{\text{sen}(x), \cos(x)\} \subset \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é L I . Mostre também que se $c_1, c_2, ..., c_n$ são n números reais distintos, então o conjunto $\{e^{c_1 x}, e^{c_2 x}, ..., e^{c_n x}\} \subset \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é L I .

11. Mostre que os conjuntos $\{\text{sen}^2(x), \cos^2(x)\}$ e $\{1, \cos(2x)\}$ geram o mesmo subespaço de $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

12. Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$. Mostre que se $\{u, v, w\}$ é um subconjunto LI do espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ então o conjunto $\{u + v, u + w, v + w\}$ também é L I. Mostre que a hipótese de que $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ (isto é, car$\mathbb{K} = 0$) é essencial.

13. Encontre 3 vetores LD em $\mathbb{R}^3$, mas de modo que cada par deles seja LI.

14. Mostre que o conjunto $\{(2i, 1, 0), (2, -1, 1), (0, 1 + i, 1 - i)\}$ é uma base de $\mathbb{C}^3$ e ache as coordenadas do vetor $(1, 0, 1)$ em relação a essa base.

15. Seja W o subespaço de $\mathbb{C}^3$ gerado pelos vetores $w_1 = (1, 0, i)$ e $w_2 = (1 + i, 1, -1)$.
(a) Mostre que $\{w_1, w_2\}$ é uma base de W.
(b) Mostre que os vetores $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (1, i, 1 + i)$ estão em W e formam outra base de W.
(c) Quais são as coordenadas de w_1 e w_2 em relação à base $\{v_1, v_2\}$?

16. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e sejam U e W subespaços de V. Mostre que $U \cup W$ é um subespaço de V se, e somente se, $U \subset W$ ou $W \subset U$.

17. Seja W um subespaço do espaço vetorial V de dimensão n. Mostre que existe um subespaço U de V tal que $V = U \oplus W$. É tal U único?

18. Sejam U e W subespaços de V. Prove que se U e W têm dimensão finita, então $U + W$ tem dimensão finita e vale a fórmula:
$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

19. Sejam U e W subespaços de V tais que $V = U + W$. Mostre que $V = U \oplus W$ se, e somente se, $\dim V = \dim U + \dim W$.