MAT5730-Álgebra Linear
Terceira Prova
21/06/2011

Boa prova!

1. **(2,0)** Seja V espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$ e seja $E \in L(V)$ uma projeção, isto é, $E^2 = E$.

   (a) Prove que Ker$E$ é ortogonal a ImE se e somente se $\langle Ev, v - Ev\rangle = 0$ para todo $v \in V$.

   Solução

   ($\Rightarrow$) É claro!

   ($\Leftarrow$) Suponha que $u \in$Ker$E$ e $v \in V$. Queremos provar que $\langle Ev, u\rangle = 0$. Da hipótese temos que $\langle E(u+v), u+v-E(u+v)\rangle = 0$. Mas

   $$0 = \langle E(u+v), u+v-E(u+v)\rangle = \langle Ev, u+v-Ev\rangle = \langle Ev, u\rangle + \langle Ev, v-Ev\rangle = \langle Ev, u\rangle\,,$$

   como queríamos.

   (b) Mostre que $\|Ev\| \leq \|v\|$ para todo $v \in V$ se e somente se E é a projeção ortogonal em ImE.

   (**Sugestão:** Se existir $v \in V$ tal que $\langle Ev, v - Ev\rangle \neq 0$, considere o vetor

   $$w = Ev - proj_{v-Ev}(Ev).$$

   Isso é apenas uma sugestão, pode fazer de outro modo!!!)

   Solução:

   ($\Leftarrow$) Se E é a projeção ortogonal de V em ImE, então $(v - Ev) \perp Ev$ para todo $v \in V$. Logo $\|v\|^2 = \|Ev + v - Ev\|^2 = \|Ev\|^2 + \|v - Ev\|^2$. Logo $\|Ev\| \leq \|v\|$ para todo $v \in V$.

   ($\Rightarrow$) Vamos usar o item (a) . Suponha que $v \in V$ é tal que $\langle Ev, v - Ev\rangle \neq 0$. Seja

   $$w = Ev - proj_{v-Ev}(Ev) = Ev - \frac{\langle Ev, v-Ev\rangle}{\|v-Ev\|^2}(v - Ev).$$

   Temos que $Ev = Ew$ já que $v - Ev \in$Ker$E$. Assim

   $$\|Ew\|^2 = \|w\|^2 + \frac{|\,\langle Ev, v-Ev\rangle\,|^2}{\|v-Ev\|^4}\|v - Ev\|^2,$$

já que $w \perp (proj_{v-Ev}(Ev))$. Logo $\|Ew\| > \|w\|$ pois $\langle Ev, v - Ev\rangle \neq 0$, contra a hipótese.

2. **(2,0)** Seja V espaço vetorial de dimentão finita sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $\langle, \rangle$. Seja $T \in L(V)$ um operador linear e sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ os autovalores de T , cada um escrito o número de vezes igual à sua multiplicidade algébrica. Prove que:

   (a)
   $$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq tr(T^*T),$$
   onde tr é o traço.
   (**Sugestão:** Use (se quiser) que existe uma base ortonormal de V tal que a matriz de T nessa base é triangular superior.
   Solução:
   Como $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado, existe uma base de V tal que a matriz de T nessa base é triangular superior. No caso de estarmos em um espaço com produto interno, o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt garante a existência de uma base **ortonormal** B de V tal que $[T]_B = A = (a_{ij})$ é triangular superior, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i > j$. (Verifique isso!)
   Seja então B uma tal base ortonormal. Vale que $[T^*]_B = A^*$ e $A^*A = [T^*T]_B$. Os elementos da diagonal principal de A^*A são
   $$c_{jj} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ij}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{j} |a_{ij}|^2.$$
   Como $\lambda_j = a_{jj}$, temos a desigualdade!

   (b) Mostre que a igualdade em **(a)** vale se e somente se T é normal.
   Solução:
   Suponha que vale a igualdade em (a). Então $|a_{ij}|^2 = 0$ para todo $i < j$. Logo $a_{ij} = 0$ também se $i < j$ e a matriz A é diagonal. Logo $[T]_B$ é diagonal, o que implica que T é normal.
   Se T é normal, existe uma base ortonormal B tal que $[T]_B$ é diagonal. Daí segue facilmente a igualdade em (a).

3. **Verdadeiro** ou **Falso**? Prove ou dê um contra-exemplo.

(a) **(1,0)** Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é uma matriz autoadjunta tal que $A^7 + A^5 + A^3 + A + I = 5I$. Então $A = I$.

Solução: A afirmação é verdadeira!

Como $A^* = A$, os autovalores de A são números reais. Mas A é raiz de polinômio $f(x) = x^7 + x^5 + x^3 + x - 4$. Esse polinômio tem apenas uma raiz real já que sua derivada $f'(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f(1) = 0$, 1 é a única raiz real de f. Logo 1 é o único autovalor de A. Como A é uma matriz hermitiana, existe U matriz unitária tal que U^*AU é diagonal. Logo $U^*AU = I_n$ e $A = I_n$.

(b) **(1,5)** Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Então existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A = P^tP$. E se $A \in M_n(\mathbb{C})$?

Solução:

É fácil ver que a afirmação é falsa para $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se $A = P^tP$ e se $T_A \in L(\mathbb{R}^n)$ é tal que $[T]_{can} = A$ então, $T_A^* = T_A$ e $T_A = T_P^*T_P$ onde $[T_P]_{can} = P$. Logo $\langle T_A v, v\rangle = \langle T_P^*T_P v, v\rangle = \langle T_P v, T_P v\rangle \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Portanto, se λ for um autovalor de A então $\lambda \geq 0$. Para exibir um contraexemplo, basta tomar, por exemplo, $A = -I_n$.

Em $M_n(\mathbb{C})$ a afirmação é verdadeira...Entretanto os resultados necessários para resolver esse problema não foram desenvolvidos no curso. De qualquer modo, uma solução é a descrita a seguir.

Toda matriz simétrica em $M_n(\mathbb{K})$ define uma forma bilinear simétrica em um espaço vetorial V de dimensão n. Seja $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V, defina f nessa base por $f(v_i, v_j) = a_{ij}$, se $A = (a_{ij})$, e estenda a $V \times V$ por linearidade nas duas variàveis. Prova-se então que existe uma matriz inversível P tal que $P^tAP = D$, onde D é uma matriz diagonal. Usando esse resultado, é fácil provar que a afirmação é verdadeira. Essa matriz D está em $M_n(\mathbb{C})$. Tome então uma matriz diagonal $D_1 \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $D_1^2 = D$. Então $P^tAP = D_1^2 \Rightarrow A = (P^t)^{-1}D_1^2P^{-1}$. Seja $Q = D_1P^{-1}$. Então $A = Q^tQ$.

4. **(1,5)** Seja $A \in M_7(\mathbb{R})$ uma matriz **ortogonal** tal que $A^6 = I$. Quais são as possíveis formas racionais de A, sabendo que $\det A = -1$?

Solução:

Na verdade nem é necessária a hipótese de que A é ortogonal, já que $m_A(x)|x^6 - 1$ e $x^6 - 1$

fatora-se como produto de polinômios irredutíveis distintos. Como

$$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

e queremos que $\det A = -1$, o escalar -1 tem que ser um autovalor de A de multiplicidade algébrica ímpar (pense nisso), assim $x+1$ é um divisor de $m_A(x)$.

(a) Se $m_A(x) = x^6 - 1$. Então o primeiro fator invariante $f_1 = x^6 - 1$ e só podemos ter $f_2 = x - 1$.

(b) Se $m_A(x) = (x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, então $f_1 = m_A(x)$ e só podemos ter $f_2 = x^2+x+1$ (ou $f_2 = x^2 - x + 1$) ou então $f_2 = f_3 = x+1$.

(c) Se $m_A(x) = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)$ (ou se $m_A(x) = (x-1)(x+1)(x^2-x+1)$), o fator invariante $f_1 = m_A(x)$ tem grau 4 e f_2 não pode ser x^2+x+1, pois teríamos que ter mais um fator invariante $f_3 | f_2$ e x^2+x+1 é irredutível em $\mathbb{R}[x]$. Logo $f_2 = (x^2+x+1)(x+1)$ ou $f_2 = (x^2+x+1)(x-1)$. Mas, na primeira possibilidade, o $\det A$ não é igual a -1. Logo só temos a segunda possibilidade.

(d) Se $m_A(x) = (x+1)(x^2+x+1) = f_1$ (ou $m_A(x) = (x+1)(x^2-x+1) = f_1$) temos $f_1 = f_2$ e $f_3 = x+1$ ou $f_2 = f_3 = x^2+x+1$ ou $f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = x+1$.

(e) Se $m_A(x) = (x-1)(x+1)$ então o polinômio característico será

$$p_A(x) = (x+1)^s(x-1)^{7-s}$$

onde s só pode ser igual a $1, 3, 5$.

(f) Se $m_A(x) = x - 1$ então $A = -I_7$.

Observação: Na verdade, nesse exercício, basta você analisar apenas quais são todos os possíveis polinômios característicos de A de modo que $\det A = -1$. Observe que se saiba que o polinômio minimal é produto de fatores irredutíveis distintos, duas matrizes com esse mesmo polinômio minimal são semelhantes se e somente se têm o mesmo polinômio característico. Olhe a forma canônica dos operadores semisimples.

5. **(2,0)** Seja $N \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz nilpotente tal que $\dim \operatorname{Ker}(N) = k$, $0 < k < n$.

   (a) Mostre que $\dim \operatorname{Ker}(N^l) \leq kl$, para todo $l \geq 1$.

   Solução:

Seja $T_N \in L(\mathbb{R}^n)$ o operador linear tal que $[T_N]_{can} = N$. Pelo Teorema da Decomposição Cíclica temos que existem vetores $v_1, ..., v_r \in \mathbb{R}^n$ e inteiros $m_1 \geq m_2 \geq .... \geq m_r > 0$ com $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$, tais que

i. $V = Z(v_1; T_N) \oplus ... \oplus Z(v_r; T_N)$.

ii. O polinômio N- anulador de cada $v_i, i = 1, ..., r$ é $f_(x) = x^{m_i}$.

Além disso, o inteiro r e os inteiros m_i são únicos.

Seja $B_i = \{v_i, T_N v_i, ..., T_N^{m_i - 1} v_i\}$ e $B = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$. Por hipótese, dimKer$N$ = k, logo, no nosso caso, $r = k$, pois , para cada $v_i, i = 1, ..., r$, os vetores $T_N v_i, ..., T_N^{m_1 - 1}$ são LI e $T_N^{m_i} v_i = 0$, portanto, a matriz $[T_N]_B$ tem r colunas nulas e $n - r$ colunas LI.

Seja $v \in \text{Ker}N^l$ com $0 < l < m_1$, pois se $l \geq m_1$ então Ker$T_N = \mathbb{R}^n$. Escreva v como combinação linear da base B. Então $v = w_1, ..., w_k$, onde $w_i \in Z(v_i; T_N)$. Temos que $T_N^l v = 0$, o que implica que $T_N^l w_i = 0$ para todo $i = 1, ..., k$.

Para facilitar a notação, vou chamar $v_i = u, m_i = s$ e $w_i = w$ e ver o que acontece $Z(v_i; T_N)$.

$$w = \sum_{j=0}^{s-1} a_j T_N^j u \Rightarrow 0 = T_N w = \sum_{j=0}^{s-1} a_j T_N^{j+l} u = \sum_{j=0}^{s-l-1} a_j T_N^{j+l} u,$$

já que se $j \geq s - l$, temos $T_N^{j+l} u = 0$. Assim, temos que ter $a_j = 0$ para todo $j = 0, ..., s - l - 1$. Portanto

$$w = \sum_{j=s-l}^{s-1} a_j T_N^j u.$$

Agora basta ver quantos elementos tem um conjunto gerador para KerN^l!

(b) Prove que $n \leq kr$, onde r é o grau do polinômio minimal de N.

Solução: Isto é claro do Teorema da Decomposição Cíclica! Como $r = m_1$ e $m_1 \geq m_2 \geq .... \geq m_k > 0$, a dimensão de $Z(v_i; T_N)$ é no máximo igual r. Logo dim$V \leq kr$.