MAT5730-Álgebra Linear
Segunda Prova
19/05/2011

Justifique todas as suas afirmações e enuncie todas as propriedades e todos os teoremas usados.

Boa prova!

1. **(2,0)** Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Escreva $A = D + N$ onde D é diagonalizável, N é nilpotente e $DN = ND$.

2. **(2,0)** Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Seja $T \in L(\mathbb{R}^4)$ tal que $[T]_{can} = A$. Determine uma base B de $\mathbb{R}^4$ tal que $[T]_B = C$ onde C é a matriz
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Prove as seguintes afirmações:

   (a) **(1,0)** Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz tal que A^3 é diagonalizável. Então A é diagonalizável.

   (b) **(1,0)** Seja $\mathbb{K}$ um corpo com car$\mathbb{K} = 0$. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ matrizes idempotentes. Então A e B são semelhantes se e somente se tr$A$ = tr$B$.

   (c) **(1,0)** Seja $T \in L(\mathbb{R}^n)$ com $n \geq 2$. Então existe um subespaço W de $\mathbb{R}^n$, invariante sob T, tal que dim$W = 2$.

4. **(3,0)** Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Seja $T \in L(V)$.

   (a) Prove que se o polinômio característico de T, $p_T(x)$, é irredutível em $\mathbb{K}[x]$ então **todo** vetor **não nulo** $v \in V$ é um vetor cíclico para T.

(b) Suponha agora que $m_T(x) = p(x)^k$ com $p(x)$ irredutível em $\mathbb{K}[x]$ e $k > 1$. Prove que existe $0 \neq v \in V$ tal que v **não** é um vetor cíclico para T.

(c) Prove que se $m_T(x)$ **não** é irredutível em $\mathbb{K}[x]$ então existe $0 \neq v \in V$ tal que v **não** é um vetor cíclico para T.

(d) Prove que se **todo** $0 \neq v \in V$ é um vetor cíclico para T então o polinômio característico de T é irredutível em $\mathbb{K}[x]$.