MAT5730-Álgebra Linear
Primeira Prova
05/04/2011

Justifique todas as suas afirmações e enuncie todas as propriedades e todos os teoremas usados.

Boa prova!

1. **(2,0)** Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(V)$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) KerT^2 = Ker$T$; **(b)** ImT^2 = ImT; **(c)** Ker$T \oplus$Im$T = V$.

   Demonstração:

   (a) $\Rightarrow$ (b) É claro que Im$T^2 \subset$ ImT. Como KerT^2 = Ker$T$, temos que dim KerT^2 = dimKer$T$, o que implica, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, que dimImT^2 = dimImT. Assim, ImT^2 é um subespaço de ImT com a mesma dimensão de ImT. Logo ImT^2 = ImT.

   (b) $\Rightarrow$ (a) Agora, é claro que Ker$T^2 \supset$ Ker$T$, pois se $T(v) = 0$ então $T^2(v) = T(T(v)) = T(0) = 0$. Como Im$T^2$ = ImT, segue do Teorema do Núcleo e da Imagem que dimKerT^2 = dimKer$T$. Logo KerT^2 = Ker$T$.

   (b) $\Rightarrow$ (c) Vamos provar que V =Ker$T+$ImT. Para isso, seja $v \in V$. Então $T(v) \in$ImT = ImT^2. Assim, existe $u \in V$ tal que $T(v) = T^2(u)$. Podemos então escrever $v = v - T(u) + T(u)$. É claro que $T(u) \in$ImT e $T(v - T(u)) = T(v) - T^2(u) = T(v) - T(v) = 0$, o que implica que $v - T(u) \in$Ker$T$.

   Do Teorema do Núcleo e da Imagem segue que a soma é direta.

   (c) $\Rightarrow$ (a) Basta provar que Ker$T^2 \subset$Ker$T$. Seja $v \in$KerT^2. Então $T^2(v) = T(T(v)) = 0$, de onde temos que $T(v) \in$Ker$T \cap$Im$T = \{0\}$. Logo $T(v) = 0$ e $v \in$Ker$T$.

2. **(2,0)** Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V tais que $V = U \oplus W$. Prove que

$$V^* = U^\circ \oplus W^\circ.$$

Demonstração Como $U \cap W = \{0\}$, temos que $V^* = \{0\}^\circ = (U \cap W)^\circ = U^\circ + W^\circ$.

Também sabemos que $V = U + W$. Logo $\{0\} = V^\circ = (U + W)^\circ = U^\circ \cap W^\circ$.

3. Prove as afirmações a seguir.

   (a) **(1,5)** Se V é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e W é um subespaço de V então

$$(V/W)^* \cong W^\circ \text{ e } W^* \cong V^*/W^\circ.$$

Demonstração:

Seja $q : V \to V/W$ a aplicação canônica, isto é, $q(v) = v + W$ para todo $v \in V$. Temos que q é sobrejetora e $\text{Ker}q = W$. Seja $q^t : (V/W)^* \to V^*$ a transposta de q. Temos que $\text{Im}q^t = (\text{Ker}q)^\circ = W^\circ$ e que $\text{Ker}q^t = (\text{Im}q)^\circ = (V/W)^\circ = \{0\}$. Logo, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, segue que $(V/W)^* \cong W^\circ$.

Considere agora $i : W \to V$ a inclusão, isto é, $i(w) = w$ para todo $w \in W$. É claro que i é injetora e $\text{Im}i = W$. Seja $i^t : V^* \to W^*$ a transposta de i. Temos então que $\text{Ker}i^t = (\text{Im}i)^\circ = W^\circ$ e $\text{Im } i^t = (\text{Ker}i)^\circ = \{0\}^\circ = W^*$. A tese segue do Teorema do Isomorfismo.

   (b) **(1,0)** Se V é um espaço vetorial de dimensão finita n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e se $f_1, ..., f_n \in V^*$ então o conjunto$\{f_1, ..., f_n\}$ é linearmente dependente se, e somente se,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}f_i \neq \{0\}.$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que $\{f_1, ..., f_n\} \subset V^*$ é LD e suponha por absurdo que $\bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}f_i = \{0\}$. Se $f \in V^*$, então $\bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}f_i \subset \text{Ker}f$. Logo, por um teorema provado em aula, temos que f é combinação linear dos f_i, donde segue que $\{f_1, ..., f_n\}$ gera V^*. Como $\dim V^* = \dim V = n$, temos que $\{f_1, ..., f_n\}$ é uma base de V^*, contrariando o fato de $\{f_1, ..., f_n\}$ ser LD.

($\Leftarrow$) Seja $0 \neq v \in \bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}f_i$. Estenda $\{v = v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V e defina $f \in V^*$ de modo que $f(v) = 1$. Se $\{f_1, ..., f_n\}$ fosse LI, seria uma base V. Então existiriam escalares $a_1, ..., a_n$ tais que $f = a_1 f_1 + ... + a_n f_n$. Então $0 = (a_1 f_1 + ... + a_n f_n)(v)$ já que $v \in \bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}f_i$. Mas $f(v) = 1$, absurdo. Logo $\{f_1, ..., f_n\}$ é LD.

4. As seguintes afirmações são **verdadeiras** ou **falsas**? Prove ou dê um contra-exemplo.

(a) **(1,0)** Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e V^* o dual de V. Se W é um subespaço de V^*, então existe um subespaço U de V tal que $U^\circ = W$.

Demonstração:

A afirmação é **falsa**. Se existir $U \subset V$ tal que $U^\circ = W$ então $U = \{u \in V | f(u) = 0 \forall f \in W\} = W^\diamond$. (Isso foi provado em aula). Vale também que $(U^\circ)^\diamond = U$ para todo subespaço U de V. (Veja o Exercício 15 da Lista 2.) Seja então $W = P(\mathbb{R})$ e $B = \{1, x, x^2, ...\}$ a base canônica de V. Seja $B^* = \{f_0, f_1, ...\}$ o conjunto dual de B. Sabemos que B^* não gera V^*. Seja $W = \langle B^* \rangle \neq V^*$. Se existisse $U \subset V$ tal que $U^\circ = W$, então $U = \{p(x) \in P(\mathbb{R}) | f_i(p(x)) = 0 \forall i = 0, 1, 2, ...\} = \{0\}$. Mas $\{0\}^\circ = V^* \neq W$.

(b) **(1,0)** Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V. Então $(U \cap W)^\circ = U^\circ + W^\circ$.

Demonstração:

A afirmação é **verdadeira**.

Seja $f \in U^\circ + W^\circ$. Então existem $g \in U^\circ$ e $h \in W^\circ$ tais que $f = g + h$. Se $v \in U \cap W$, então $f(v) = g(v) + h(v) = 0$ pois $g \in U^\circ$, $h \in W^\circ$ e $v \in U \cap W$. Logo

$$U^\circ + W^\circ \subset (U \cap W)^\circ.$$

Vamos agora provar a outra inclusão. Seja $f \in (U \cap W)^\circ$. Vamos provar que existem $g \in U^\circ$ e $h \in W^\circ$ tais que $f = g + h$. Para isso, seja B uma base de $U \cap W$. Sejam $B_U \subset V$ e $B_W \subset V$ tais que $B \cup B_U$ é base de U e $B \cup B_W$ é base de W. O conjunto $B \cup B_U \cup B_W$ é LI. De fato, suponha que $v + u + w = 0$, com $v \in \langle B \rangle$, $u \in \langle B_U \rangle$ e com $w \in \langle B_W \rangle$. Então $v + u = -w \in U \cap W$. Logo $w \in \langle B \rangle \cap \langle B_W \rangle = 0$ pois $B \cup B_W$ é LI. Logo $0 = -w = v + u$. Mas daí, $v = u = 0$ pois $B \cup B_U$ é LI. Seja então $C \subset V$ tal que $B \cup B_U \cup B_W \cup C = A$ é uma base de V. Defina $g, h \in V^*$ por:

$$g(v) = \begin{cases} 0 & se \quad v \in B \cup B_U \\ f(v) & se \quad v \in B_W \cup C \end{cases}$$

e

$$h(v) = \begin{cases} 0 & se \quad v \in B \cup B_W \cup C \\ f(v) & se \quad v \in B_U \end{cases}$$

Então, é claro que $g \in U^\circ, h \in W^\circ$. Se $v \in V, v = x + u + w + y$, onde $x \in U \cap W, u \in \langle B_U \rangle, w \in \langle B_W \rangle$ e $y \in \langle C \rangle$. Logo

$$(g + h)(v) = (g + h)(x) + (g + h)(u) + (g + h)(w) + (g + h)(y)$$

$$= g(x) + h(x) + g(u) + h(u) + g(w) + h(w) + g(y) + h(y)$$

$$= 0 + 0 + 0 + f(u) + f(w) + 0 + f(y) + 0 = f(x) + f(u) + f(w) + f(y) = f(v),$$

já que $0 = f(x)$ pois $f \in (U \cap W)^\circ$. Logo $f = g + w$ e

$$U^\circ + W^\circ \supset (U \cap W)^\circ.$$

5. **(1,5)** Seja $V = P(\mathbb{R})$ e seja W o subespaço de V constituído pelos múltiplos do polinômio $f(x) = (x^2 - 1)^2$. Mostre que $P(\mathbb{R}) = W \oplus P_3(\mathbb{R})$. Prove que os funcionais de V^* definidos por

$$p(x) \mapsto p(1), p(x) \mapsto p'(1), p(x) \mapsto p(-1), p(x) \mapsto p'(-1), \ \ \forall p(x) \in V$$

formam uma base de W°.

Seja $p(x) \in P(\mathbb{R})$. Pelo Algoritmo da Divisão existem polinômios $q(x), r(x) \in P(\mathbb{R})$ tais que $p(x) = (x^2 - 1)^2 q(x) + r(x)$ onde $r(x) = 0$ ou $0 \leq \text{grau} r \leq 3$. Daí é claro que $P(\mathbb{R}) = W + P_3(\mathbb{R})$. Para ver que a soma é direta, basta notar que como $\text{grau}(x^2 - 1)^2 = 4$, o grau de um polinômio que pertence a W é maior ou igual a 4. Assim ele não pode estar em $P_3(\mathbb{R})$. Logo $P(\mathbb{R}) = W \oplus P_3(\mathbb{R})$.

Observe agora que os funcionais definidos acima estão em W° pois 1 e -1 são raízes duplas de $(x^2 - 1)^2$. Pelo Exercício 3(a) temos que $W^\circ \cong (P(\mathbb{R})/W)^* \cong (P_3(\mathbb{R}))^*$. Logo $\dim W^\circ = 4$. Assim só é preciso provar que os funcionais definidos acima são LI!!!! E são, façam as contas!!!!