MAT5730 Álgebra Linear

Lista 8

2011

Nesta lista o corpo $\mathbb{K}$ é sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Defina **posto linha (coluna) de A** como sendo a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^m$) gerado pelas linhas (colunas) de A .

(a) Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ é A . Prove que $\text{Ker}T = W^\perp$, onde W é o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas de A .

(b) Prove que o posto linha de A é igual ao posto coluna de A .

2. Sejam V e W espaços vetoriais de mesma dimensão (finita) sobre $\mathbb{K}$ e com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ respectivamente. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\langle Tu, Tv \rangle_W = \langle u, v \rangle_V$ para todo $u, v \in V$.

(b) T leva **toda** base ortonormal de V em uma base ortonormal de W .

(c) T leva **uma** base ortonormal de V em uma base ortonormal de W .

(d) $\|Tv\|_W = \|v\|_V$ para todo $v \in V$.

Tal T é um **isomorfismo de espaços com produto interno**.

3. Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ é chamada **ortogonal** se $AA^t = I_n$ e **unitária** se $AA^* = I_n$. Encontre um exemplo de uma matriz complexa unitária que não é ortogonal e um exemplo de uma matriz que é ortogonal e não é unitária.

4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $T \in L(V)$ um isomorfismo de espaços com produto interno, isto é, $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in V$. Prove que $T^* = T^{-1}$. Prove que vale também a recíproca, isto é, se $T^* = T^{-1}$, então T é um isomorfismo de espaços com produto interno. Tal T é chamado operador **unitário** se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e **ortogonal** se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

5. Seja T o operador linear em $\mathbb{C}^2$ (com o produto interno usual) definido por:

$$T(1,0) = (1+i,2) \quad \text{e} \quad T(0,1) = (i,i).$$

Ache a matriz de T^* em relação á base canônica de $\mathbb{C}^2$. Vale que $TT^* = T^*T$?

6. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja T um operador linear em V que possui um adjunto T^* .

(a) Mostre que $\text{Ker}T^* = (\text{Im}T)^\perp$ e que $\text{Im}T^* \subset (\text{Ker}T)^\perp$.

(b) Mostre que se $\dim V < \infty$, então $\text{Im}T^* = (\text{Ker}T)^\perp$.

(c) Seja $V = C([0,1], \mathbb{R})$ e $T \in L(V)$ definida por: $f \mapsto T(f)$, com $T(f)(t) = tf(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Ache T^* e mostre que $\text{Im}T^* \neq (\text{Ker}T)^\perp$.

7. Seja $V = P_3(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Seja D o operador derivação. Ache D^* .
8. Seja T o operador linear em $\mathbb{C}^2$ (com o produto interno usual), cuja matriz em relação à base canônica é $a_{kj} = (i)^{k+j}$ para $1 \leq i, j \leq 2$. Ache T^* e uma base para $\text{Ker}T^*$.
9. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle, \rangle$ e seja T um operador linear em V que possui um adjunto T^* . Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
- $T^* = T$.
 - $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$ para todo $u, v \in V$.

Se $\dim V < \infty$, (a) e (b) são equivalentes a

- T pode ser representado por uma matriz autoadjunta em relação a uma base ortonormal de V .

(Um operador linear em V que tem uma das (e portanto TODAS as) propriedades acima é chamado **autoadjunto** ou **hermitiano**.)

10. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle, \rangle$. Seja E um operador linear em V tal que $E^2 = E$ e tal que E possui um adjunto E^* . Prove que E é autoadjunto se, e somente se $EE^* = E^*E$. Prove também que, neste caso, E é a projeção ortogonal em $W = \text{Im}E$.
11. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $\langle, \rangle$ e seja T um operador linear em V . Prove que T é autoadjunto se, e somente se $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $v \in V$.
12. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $\langle, \rangle$ e seja T um operador linear em V . Prove que se $\langle Tv, v \rangle = 0$ para todo $v \in V$, então $T = 0$. Dê um exemplo para mostrar que o mesmo resultado não é necessariamente verdadeiro se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.
13. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $\langle, \rangle$ e seja T uma função de V em V tal que para todo $u, v \in V$, $\|Tu - Tv\| = \|u - v\|$ e $T(iv) = iTv$. Prove que T é linear e que $\|Tv\| = \|v\|$ para todo $v \in V$.
14. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle, \rangle$ e seja T um operador linear em V tal que T admite um adjunto. Prove que se $T^*T = 0$ então $T = 0$.
15. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$. Mostre que A se escreve de modo único como $A = B + iC$, onde B e C são matrizes autoadjuntas.
16. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz autoadjunta. Mostre que $A + iI_n$ é inversível e que $U = (A + iI_n)^{-1}(A - iI_n)$ é unitária. A matriz U é chamada **transformada de Cayley de** A .

17. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Prove que $A + iB \in M_n(\mathbb{C})$ é unitária se, e somente se a matriz

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

é ortogonal.

18. Seja $T \in L(V)$. Prove que se W é um subespaço de V invariante sob T , então $W^\perp$ é invariante sob T^* .

19. Sejam $S, T \in L(V)$. Suponha que S e T admitem adjuntas.

(a) Mostre que se S e T são autoadjuntas, então ST é autoadjunta se, e somente se, $ST = TS$.

(b) Prove que T^*T é autoadjunta.

(c) Se T é autoadjunta, mostre que S^*TS é autoadjunta.

20. Suponha que $\dim V$ é finita e seja $T \in L(V)$ normal e nilpotente. Mostre que T é o operador nulo.

21. Sejam V de dimensão finita, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $T \in L(V)$ um operador normal. Prove que:

(a) T é autoadjunto se, e somente se, todo autovalor de T é um número real.

(b) T é unitário se, e somente se, todo autovalor de T é um número complexo de módulo igual a 1.

(c) T é o operador nulo se, e somente se todos os autovalores de T são nulos.

(d) $T^* = -T$ se, e somente se, os autovalores de T são nulos ou números complexos imaginários puros.

22. Um operador linear $T \in L(V)$ é **não negativo (positivo)** se T é autoadjunto e $\langle Tv, v \rangle \geq 0$ ($\langle Tv, v \rangle > 0$) para todo $v \in V$. Se a dimensão de V é finita e T é não negativo, mostre que as autovalores de T são números reais não negativos. Mostre que se T é não negativo se, e somente se, existe $S \in L(V)$ tal que $T = S^*S$.

23. Suponha que $\dim V$ é finita. Prove que o produto de dois operadores lineares positivos é positivo se, e somente se, eles comutam. Mostre que a soma de dois operadores positivos é um operador positivo.

24. Prove que se $\dim V$ é finita e $T \in L(V)$ é um operador positivo e unitário, então $T = I$.

25. Suponha que $\dim V$ é finita e seja $T \in L(V)$ um operador linear não negativo. Prove que se $v \in V$ é tal que $\langle Tv, v \rangle = 0$, então $Tv = 0$.

26. Prove que toda matriz positiva é quadrado de uma matriz também positiva.

27. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $A^* = A$. Mostre que existe um número real positivo c tal que $A + cI$ é positiva.

28. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ ($A \in M_n(\mathbb{R})$) uma matriz inversível. Prove que $A = BC$, onde B é unitária (ortogonal) e C é positiva. Mostre também que esta decomposição é única.
(Sugestão: Escreva $A^*A = D^2$ e considere $B = D^{-1}A$.)
29. Dê exemplo de uma matriz A tal que A^2 é normal, mas A não é normal.
30. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrizes autoadjuntas. Prove que $A + iB$ é normal se, e somente se, $AB = BA$.
31. Sejam V de dimensão finita, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $T \in L(V)$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
- T é normal.
 - $\|Tv\| = \|T^*v\|$ para todo $v \in V$.
 - Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in V$. Então $Tv = \lambda v$ se, e somente se, $T^*v = \bar{\lambda}v$.
 - Existe E base ortonormal de V tal que $[T]_E$ é diagonal.
 - Existe $g \in \mathbb{C}[x]$ tal que $T^* = g(T)$.
 - Todo subespaço de V invariante sob T também é invariante sob T^* .
 - $T = NU$ onde N é não negativo e U é unitário e $NU = UN$.
32. Seja V de dimensão finita. Seja $T \in L(V)$ normal. Prove que se W é invariante sob T , então $W^\perp$ é invariante sob T .
33. Seja
- $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$
- Ache uma matriz ortogonal $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que P^tAP é diagonal.
34. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Prove que existe uma matriz real C tal que $C^3 = A$.
35. Sejam $A_1, A_2, \dots, A_k \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes simétricas tais que $A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_k^2 = 0$. Prove que $A_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$.
36. Seja $\mathcal{O}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ é ortogonal}\}$.
- Mostre que $\mathcal{O}(n)$ é um grupo com o produto de matrizes.
 - Mostre que $|\det A| = 1$ para toda $A \in \mathcal{O}(n)$.
 - Mostre que $|\operatorname{tr} A| \leq n$ para toda $A \in \mathcal{O}(n)$.
37. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e seja $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base qualquer de V . Seja $a_{ij} = \langle v_j, v_i \rangle$, $i, j = 1, \dots, n$. Mostre que a matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ é uma matriz positiva. Mostre que vale a "recíproca", isto é, se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é uma matriz positiva então $\langle X, Y \rangle = Y^*AX$ define um produto interno no espaço $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$.

38. Prove que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

é uma matriz positiva.

39. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ matrizes simétricas tais que $A^5 = B^5$. Prove que $A = B$.

40. Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e seja V de dimensão finita. Seja $T \in L(V)$ um operador simétrico de traço nulo. Mostre que existe uma base ortonormal E de V tal que todos os elementos da diagonal principal da matriz de T na base E são nulos.

41. Seja $V = \mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Seja $T \in L(V)$ um operador ortogonal tal que T admite **apenas** 1 autovalor real e ele é positivo. Determine a forma racional de T em função de 1 parâmetro.

42. Seja $A \in M_5(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal com polinômio minimal

$$m_A(x) = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1).$$

Determine todas as possibilidades para a forma racional de A e as correspondentes formas canônicas de operadores ortogonais de A .

43. **Verdadeiro ou Falso?**

(a) Se A é uma matriz real simétrica, então existe uma matriz real B tal que $A = B^t B$.

(b) Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que $T^2 = I$. Então T é um operador ortogonal.

(c) Duas matrizes ortogonais são semelhantes se, e somente se, têm o mesmo polinômio característico.

44. Prove que a matriz

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix}$$

é ortogonal para todos os valores de θ e φ .

45. Seja V um espaço vetorial complexo, de dimensão finita n e com produto interno. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear tal que $T^* = T^k$ para algum inteiro $k > 1$. Mostre que existe uma base ortonormal de V tal que a matriz de T nessa base é

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

onde para cada $j = 1, \dots, n$, ou $\lambda_j = 0$ ou λ_j é uma raiz $k + 1$ -ésima da unidade.