MAT5730 Álgebra Linear

Lista 7

2011

Nesta lista o corpo $\mathbb{K}$ sempre será $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(a) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mostre que para $u, v \in V$, $\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

(b) Mostre que (a) é falso se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(c) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mostre que para $u, v \in V$, $\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \|\alpha u + \beta v\|^2 = \|\alpha u\|^2 + \|\beta v\|^2$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Mostre que vale a *lei do paralelogramo*:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

para todo $u, v \in V$.

3. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mostre que para $u, v \in V$, $\|u\| = \|v\|$ se, e somente se, $u + v$ e $u - v$ são ortogonais. Discuta a afirmação para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Mostre que para todo $u, v \in V$, vale a *identidade de polarização*:

$$4 \langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2.$$

Mostre que se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ então vale, para todo $u, v \in V$ a *identidade de polarização*:

$$4 \langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2.$$

5. Ache uma base ortonormal de cada um dos seguintes subespaços S e determine também, em cada caso, o subespaço $S^\perp$.

(a) S é o subespaço de $\mathbb{C}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 0, i)$ e $v_2 = (2, 1, 1 + i)$, com o produto interno usual.

(b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, com o produto interno usual.

(c) $S = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \mid xp'(x) = p(x)\}$ e $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

(d) $S = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$ e $\langle A, B \rangle = \text{tr}AB^t$.

6. Seja $V = M_3(\mathbb{C})$ com o produto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}AB^*$. Ache $W^\perp$, onde W é o subespaço de V constituído pelas matrizes diagonais.

7. Seja $V = C([-1, 1], \mathbb{R})$ com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Seja W o subespaço de V formado pelas funções pares, isto é, $W = \{f \in V \mid f(x) = f(-x) \forall x \in [-1, 1]\}$. Ache $W^\perp$.

8. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V e sejam $c_1, c_2, \dots, c_n$, n escalares quaisquer. Mostre que existe um único vetor $v \in V$ tal que $\langle v, v_j \rangle = c_j$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

9. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Prove que se

$$|\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|,$$

então u e v são linearmente dependentes.

10. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja W um subespaço de V . Seja $v \in V$. Um vetor $w \in W$ é uma **melhor aproximação para v por vetores em W** se $\|v - w\| \leq \|v - u\|$ para todo $u \in W$. Prove que:

(a) O vetor $w \in W$ é uma melhor aproximação para $v \in V$ por vetores em W se, e somente se, $v - w \in W^\perp$.

(b) Se uma melhor aproximação para $v \in V$ por vetores em W existe, então ela é única.

(c) Se $\dim W < \infty$ então existe uma melhor aproximação para $v \in V$ por vetores em W e ela é dada por

$$w = \sum_{i=1}^k \langle v, e_i \rangle e_i,$$

onde $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ é uma base ortonormal qualquer de W .

Quando tal vetor w existe, (ele é único) é chamado **projeção ortogonal de v em W** .

11. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja W um subespaço de V . Seja $v \in V$. Seja $E : V \rightarrow V$ a função tal que $Ev = w =$ projeção ortogonal de v em W . (Assuma que para todo $v \in V$ existe tal w .) Prove que:
- E é um operador linear em V .
 - E é idempotente.
 - $\text{Im}E = W$ e $\text{Ker}E = W^\perp$.
 - $V = W \oplus W^\perp$.
12. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e seja W o subespaço gerado pelos vetores $(1, -1, 1)$ e $(1, 1, 1)$. Encontre o operador linear E (do exercício anterior), ache a matriz de E na base canônica de $\mathbb{R}^3$.
13. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja W um subespaço de dimensão finita de V . Mostre que $(W^\perp)^\perp = W$. O resultado continua verdadeiro se a dimensão de W não é finita?
14. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, W um subespaço de dimensão finita de V e E a projeção ortogonal de V em W . Prove que $\langle Ev, u \rangle = \langle v, Eu \rangle$ para todo $u, v \in V$.
15. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja W um subespaço de dimensão finita de V . Existem, em geral, várias projeções cuja imagem é W . Uma delas, a projeção ortogonal, tem a propriedade que $\|Ev\| \leq \|v\|$, para todo $v \in V$. Prove se $E \in L(V)$ é uma projeção cuja imagem é W e $\|Ev\| \leq \|v\|$, para todo $v \in V$, então E é a projeção ortogonal em W .
- (Sugestão:** Prove que $\langle Ev, v - Ev \rangle = 0$ para todo $v \in V$ se, e somente se, $\langle u, Ev \rangle = 0$ para todo $u \in \text{Ker}E$ e $v \in V$.)
16. Seja $V = C([0, 1], \mathbb{R})$ com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.
- Ache uma base ortonormal do subespaço de V gerado pelos polinômios $1, x$ e x^2 .
 - Ache o polinômio de grau menor ou igual a 2 que melhor aproxima $f(x) = \cos x$ no intervalo $[0, 1]$.

17. Seja $V = C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Seja

$$S = \{1, \cos(nx), \sin(mx), m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

(a) Prove que S é um conjunto ortogonal de V .

(b) Seja

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ x, & \text{se } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Ache a função da forma $g(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x)$ que melhor aproxima f no intervalo $[0, 2\pi]$.

18. Determine:

$$\min_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx.$$

(Resposta: $\frac{1}{180}$.)

19. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, seja $T \in L(V)$ e suponha que $\{\|Tv\|, v \in V, \|v\| = 1\}$ é limitado. Defina a **norma** de T por

$$\|T\| = \sup_{\|v\|=1} \|Tv\|.$$

(a) Se T é uma projeção, mostre que $T = 0$ ou $\|T\| \geq 1$.

(b) Se T é uma projeção e $\|T\| = 1$, mostre que T é projeção ortogonal.