MAT5730 Álgebra Linear

Lista 6

2011

Operadores Semi-Simples

1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e seja $T \in L(V)$ e suponha que o polinômio minimal é irredutível em $\mathbb{K}[x]$. Prove que V é semisimples, isto é, que todo subespaço de V invariante sob T tem um complementar invariante sob T .
2. Seja agora $T \in L(V)$ tal que o polinômio minimal de T é $m_T(x) = p(x)^m$, onde $p(x)$ é irredutível em $\mathbb{K}[x]$ e $m \geq 2$. Mostre que $W = \text{Ker} p(T)$ não tem um complementar invariante sob T .
3. Use os exercícios (1) e (2) junto com o Teorema da Decomposição Primária para provar o seguinte resultado: "Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e seja $T \in L(V)$. T é semi-simples se, e somente se, o polinômio minimal $m_T(x) = p_1(x)p_2(x) \cdots p_k(x)$ onde cada polinômio $p_i(x)$ é irredutível em $\mathbb{K}[x]$ e $p_i(x) \neq p_j(x)$ se $i \neq j$."

4. Sejam agora $A \in M_n(\mathbb{R})$, $T \in L(\mathbb{R}^n)$ tal que $T_{can} = A$ e $T^c \in L(\mathbb{C}^n)$ tal que $T_{can}^c = A$. Prove que T é semi-simples se, e somente se, T^c é diagonalizável.

Observação: Um corpo $\mathbb{K}$ é **perfeito** se todo polinômio irredutível em $\mathbb{K}[x]$ só tem raízes simples no fecho algébrico de $\mathbb{K}$. (Todo corpo de característica 0 é perfeito e todo corpo finito é perfeito.) Sendo assim, o resultado desse exercício é válido se trocarmos $\mathbb{R}$ por um corpo perfeito $\mathbb{K}$ e $\mathbb{C}$ pelo fecho algébrico de $\mathbb{K}$.

5. A forma canônica dos operadores reais semi-simples

Sejam A , T e T^c como no exercício 4. Suponha que T é semi-simples.

- (a) Seja $\alpha = a + ib$ uma raiz complexa de $m_{T^c}(x)$. Então, sua conjugada $\bar{\alpha} = a - ib$ é também raiz de $m_{T^c}(x)$. Seja $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ um autovetor associado ao autovalor α e escreva $v = u + iw$, onde $u, w \in \mathbb{R}^n$. Seja $\bar{v} = u - iw$. Prove que $T(\bar{v}) = \bar{\alpha}\bar{v}$.
- (b) Sejam $u = \frac{1}{2}(v + \bar{v})$ e $w = \frac{1}{2i}(v - \bar{v})$. Mostre que $Tu = au - bw$ e $Tw = bu + aw$.
- (c) Seja $p(x) = x^2 + mx + n$ um fator irredutível de $m_T(x)$ e seja $W = \text{Ker} p(T) \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que α e $\bar{\alpha}$ são as raízes complexas de $p(x)$ e sejam $V(\alpha)$ e $V(\bar{\alpha})$ os autoespaços de T^c correspondentes a α e $\bar{\alpha}$ respectivamente. Mostre que se $\{v_1, \dots, v_d\}$ é uma base de $V(\alpha)$, então $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_d\}$ é um base de $V(\bar{\alpha})$. Escreva cada $v_j = u_j + iw_j$, como no item (a). Mostre que $\{u_1, w_1, \dots, u_d, w_d\}$ é uma base de W .