MAT5730 Álgebra Linear

Lista 5

2011

1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja $T \in L(V)$. Dizemos que T é **triangularizável** se existir uma base B de V tal que $[T]_B$ é triangular superior (ou inferior). Prove que se $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$ então T é triangularizável.

(Sugestão: Use indução em $\dim V$.)

2. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$. Seja $\mathcal{F}$ uma família de operadores triangularizáveis que comutam. Prove que:

(a) Existe $0 \neq v \in V$ um autovetor comum a todo operador $T \in \mathcal{F}$, isto é, existe $0 \neq v \in V$ tal que para cada $T \in \mathcal{F}$ existe $\lambda_T \in \mathbb{K}$ tal que $Tv = \lambda_T v$.

(Sugestão: Use indução em $\dim V$.)

(b) Mostre que a família $\mathcal{G} = \{T^t \in L(V^*) \mid T \in \mathcal{F}\}$ é uma família de operadores lineares que comutam.

(c) Use o item (a) para obter $0 \neq f \in V^*$ autovetor comum à família $\mathcal{G}$. Prove que $\text{Ker} f$ é invariante sob T para todo $T \in \mathcal{F}$.

(d) Use indução em $\dim V$ (e o item (c)) para provar que existe uma base B de V tal que $[T]_B$ é triangular para todo $T \in \mathcal{F}$.

3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e sejam $T, N \in L(V)$ com N nilpotente e tais que $TN = NT$. Prove que:

(a) T é inversível se e somente se $T + N$ é inversível.

(b) $\det T = \det(T + N)$ e $p_T(x) = p_{T+N}(x)$.

4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T]_{can} = A$. Encontre a decomposição primária de T .

5. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T]_{can} = A$. Escreva $T = D + N$ onde D é um operador diagonalizável, N é nilpotente e $DN = ND$.

6. Seja $N \in M_n(\mathbb{K})$ tal que N é nilpotente.

(a) Mostre que $I_n - N$ é inversível e determine a sua inversa.

(b) Defina

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{N^k}{k!},$$

onde $N^0 = I_n$ e m é o índice de nilpotência de N . Prove que $\exp(N)$ é inversível e determine a sua inversa.

7. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz não nula tal que $A^3 = -A$. Mostre que A é semelhante à matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T \in L(V)$ com polinômio característico

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \cdots (x - \lambda_k)^{n_k}$$

e polinômio minimal

$$m_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}.$$

(a) Prove que para cada $i = 1, 2, \dots, k$, $\dim \text{Ker}(T - \lambda_i I)^{m_i} = n_i$.

(b) Seja

$$W_i = \{v \in V \mid (T - \lambda_i I)^l v = 0 \text{ para algum inteiro } l \geq 0\}.$$

Prove que $W_i = \text{Ker}(T - \lambda_i I)^{m_i}$ para todo $i = 1, \dots, k$.

9. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(V)$ um operador linear que comuta com todo operador diagonalizável de $L(V)$. Prove que T é um múltiplo escalar do operador identidade.

10. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $T_A : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ o operador definido por $T_A(M) = AM - MA$.

(a) Prove que se A é nilpotente, então T_A é nilpotente. Vale a recíproca?

(b) Prove que se $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado e se T_A é diagonalizável, então A é diagonalizável.

(Sugestão: Para cada matriz $M \in M_n(\mathbb{K})$ seja $\tilde{M} \in L(\mathbb{K}^n)$ o operador tal que $[\tilde{M}]_{can} = M$.

Seja $0 \neq v \in \mathbb{K}^n$ um autovetor de $\tilde{A}$. Considere a transformação linear $\phi : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^n$ definida por $\phi(M) = \tilde{M}v$. Prove que ϕ é sobrejetora.)

11. Seja $T \in L(\mathbb{R}^n)$ um operador linear que não tem autovetores. Mostre que não existem subespaços invariantes sob T de dimensão ímpar.
12. Encontre duas matrizes 4×4 nilpotentes que tenham o mesmo polinômio minimal, mas que não sejam semelhantes.
13. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T \in L(V)$ com polinômio minimal

$$m_T(x) = p_1(x)^{m_1} \cdots p_k(x)^{m_k},$$

onde cada $p_i(x)$ é irredutível em $\mathbb{K}[x]$. Seja $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ a decomposição primária de V , isto é, $V_i = \text{Ker } p_i(T)^{m_i}$. Seja W um subespaço de V invariante sob T . Mostre que

$$W = (W \cap V_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap V_k).$$

14. *O que está errado com o seguinte argumento para "provar" que todo operador linear T em um espaço vetorial sobre um corpo algebricamente fechado, pode ser escrito como soma de um operador diagonalizável e um operador nilpotente que comutam?*

"Vale que T é triangularizável, logo, existe uma base B de V tal que $[T]_B = A$ é triangular. Seja D a diagonal dessa matriz. Então $A - D$ é nilpotente e $A = D + N$."

15. Seja N um operador linear nilpotente em um espaço vetorial de dimensão finita n . Prove que o polinômio característico de N é $p_N(x) = x^n$.
16. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(V)$. Prove que existe um vetor cíclico para T se, e somente se, o polinômio característico de T é igual ao polinômio minimal de T .
17. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(V)$.
 - (a) Prove que se existe um vetor cíclico para T , então todo subespaço de V , invariante sob T , também tem um vetor cíclico.
 - (b) Vale a recíproca do item (a)? (Isto é, se todo subespaço próprio W de V , invariante sob T tem um vetor cíclico para T_W , é verdade que existe um vetor cíclico para T ?)
18. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(V)$. Prove que se V é T -cíclico, então todo operador linear que comuta com T é um polinômio em T .

19. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(V)$. Prove que se T^2 tem um vetor cíclico, então T tem um vetor cíclico. Vale a recíproca?
20. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T \in L(V)$ um operador diagonalizável. Mostre que existe um vetor cíclico para T se, e somente se, T tem $n = \dim V$ autovalores distintos.
21. Prove que duas matrizes 3×3 são semelhantes se, e somente se, têm o mesmo polinômio característico e o mesmo polinômio minimal. Dê um exemplo para mostrar que o mesmo resultado já não vale para matrizes 4×4 .
22. Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer e sejam $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ um polinômio mônico de grau $n \geq 1$ e $m(x) \in \mathbb{K}[x]$ um polinômio mônico de grau $m \leq n$ tais que:
- $m(x)$ divide $p(x)$.
 - Todo fator irredutível de $p(x)$ divide $m(x)$

Mostre que existe $A \in M_n(K)$ tal que $p(x) = \det(xI - A)$ e $m(x)$ é o polinômio minimal de A .

23. Prove que toda matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ é semelhante à sua transposta A^t .
24. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T \in L(V)$. Seja $R = \text{Im}(T)$.
- Prove que R tem um complementar invariante sob T se, e somente se, R e $N = \text{Ker}T$ são independentes.
 - Se R e N são independentes, prove que N é o único complementar de R que é invariante sob T .
25. Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ o operador linear tal que

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Seja $W = \text{Ker}(T - 2I)$. Prove que W não tem nenhum complementar invariante sob T .
(Sugestão: Prove que W não é T -admissível.)

26. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ache uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ esteja na forma racional.

27. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ache vetores $v_1, \dots, v_r$ que satisfazem as condições do teorema da decomposição cíclica.

28. Seja A e B duas matrizes **reais**. Prove que se A e B são semelhantes sobre o corpo dos números complexos, então elas são também semelhantes sobre $\mathbb{R}$.

29. Sejam N_1 e N_2 matrizes 6×6 nilpotentes. Suponha que elas têm o mesmo polinômio minimal e o mesmo posto. Prove que elas são semelhantes. Mostre que o mesmo resultado não é verdadeiro para matrizes 7×7 .

30. Seja A uma matriz $n \times n$ **real**, tal que $A^2 + I = 0$. Prove $n = 2k$ e que A é semelhante à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

onde I é a matriz identidade $k \times k$.

31. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo arbitrário $\mathbf{K}$ e seja $T \in L(V)$. Prove que T tem um vetor cíclico se, e somente se a seguinte afirmação é verdadeira: "Todo operador linear que comuta com T é um polinômio em T ."

32. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo arbitrário $\mathbb{K}$ e seja $T \in L(V)$. Prove que **todo** vetor não nulo $v \in V$ é um vetor cíclico para T se, e somente se, o polinômio característico de T é irredutível em $\mathbb{K}[x]$.

33. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo arbitrário $\mathbb{K}$ e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear em V . Suponha que:

(a) o polinômio minimal de T é uma potência de um polinômio irredutível;

(b) o polinômio minimal de T é igual ao polinômio característico de T .

Prove que nenhum subespaço não trivial de V invariante sob T tem um complementar que também é invariante sob T .

34. Ache a forma racional R da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

e encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = R$.

35. Seja $T \in L(\mathbb{R}^4)$ um operador linear tal que:

(a) $x^2 + 3$ é um divisor do polinômio minimal de T .

(b) 1 é o único autovalor de T .

Quais são as possíveis formas racionais de T ?

36. Classifique, a menos de semelhança, as matrizes reais 6×6 com polinômio minimal $(X - 1)^2(X + 1)(X - 2)$.

37. Determine quais das matrizes seguintes são semelhantes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 13 & -16 & 2 & -1 \\ -9 & -13 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -6 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & -8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

38. Classifique, a menos de semelhança, todas as matrizes 6×6 nilpotentes.

39. Mostre que as matrizes complexas

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

são semelhantes.

40. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ache a forma de Jordan J de A e encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = J$.

41. Seja V um espaço vetorial de dimensão n , com $n \geq 2$ e seja T um operador linear em V de posto 2. Determine todas as possíveis formas de Jordan de T .

42. Seja $T : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ o operador linear definido por $T(p(X)) = p(X + 1)$.

(a) Determine a forma de Jordan de T .

(b) Se $n = 4$, encontre uma base B de $P_n(\mathbb{R})$ tal que $[T]_B$ esteja na forma de Jordan.

43. Determine o número de matrizes não semelhantes A em $M_6(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$(A - 2I_6)^3 = 0.$$

44. Seja $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ um operador linear com polinômio característico

$$p_T(X) = (X - a)^3(X - b)^3$$

e polinômio minimal

$$m_T(X) = (X - a)^2(X - b)$$

e $a \neq b$. Ache a forma racional e a forma de Jordan de T .

45. Classifique, a menos de semelhança, todas as matrizes reais 7×7 com polinômio característico $p_T(X) = (X - 1)^4(X - 2)^2(X - 1)$.

46. Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ache a forma de Jordan J de A e encontre uma matriz $P \in M_5(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = J$.

47. Determine a forma racional e a forma de Jordan da matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

48. Dê a forma de Jordan da seguinte matriz $A \in M_7(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

49. Seja $N \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz nilpotente tal que $\dim \text{Ker}(N) = k$, $0 < k < n$.

(a) Mostre que $\dim \text{Ker}(N^l) \leq kl$, para todo $l \geq 1$.

(b) Prove que $n \leq kr$, onde r é o grau do polinômio minimal de N .

50. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja $T \in L(V)$. Seja $f \in \mathbb{K}[x]$ um polinômio mônico, irredutível e de grau $d \geq 1$.

(a) Suponha que $d|n$. Prove que existe $T \in L(V)$ tal que o polinômio minimal de T é f .

(b) Se $T \in L(V)$ é tal que seu polinômio minimal tem grau d e é irredutível em $\mathbb{K}[x]$, é verdade que $d|n$? Justifique.