

MAT5730 Álgebra Linear

Lista 4

2011

1. Seja $D \in L(P_n(\mathbb{R}))$ o operador *derivação*. Ache o polinômio minimal de D .
2. Encontre uma matriz 3×3 cujo polinômio minimal é X^2 .
3. Ache o polinômio minimal de cada uma das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

4. Seja $C \in M_n(\mathbb{K})$ a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Calcule o polinômio característico de C . Prove que este é também o polinômio minimal de C . A matriz C é chamada **a matriz companheira do polinômio** $c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + x^n$.

5. Encontre os autovalores sobre $\mathbb{R}$ e sobre $\mathbb{C}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Seja $M \in M_n(\mathbb{R})$ a matriz

$$M = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ b_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $b_1 > 0$ e $b_i \geq 0$ para todo $i = 2, \dots, n$. Mostre que M tem apenas um autovalor estritamente positivo.

7. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz inversível. Mostre que existe um polinômio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $A^{-1} = p(A)$.

8. Mostre que uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ é inversível se, e somente se, o termo constante de seu polinômio minimal é diferente de 0.

9. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Prove que se $I - AB$ é inversível, então $I - BA$ é inversível e que

$$(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A.$$

10. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Prove que AB e BA têm os mesmos autovalores em $\mathbb{K}$. Elas têm o mesmo polinômio característico? E o minimal?

11. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $p \in \mathbb{K}[x]$. Mostre que se λ é um autovalor de A , então $p(\lambda)$ é um autovalor de $p(A)$. O que se pode dizer sobre a recíproca dessa afirmação?

12. Seja $V = C(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Seja T o operador linear em V tal que para cada f em V , $T(f)$ é a função

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Prove que T não tem autovalores.

13. Seja $D \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz **diagonal** com polinômio característico

$$p_D(x) = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k},$$

onde $c_1, \dots, c_k$ são distintos. Seja

$$W = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid DA = AD\}.$$

Prove que $\dim W = d_1^2 + \cdots + d_k^2$.

14. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

É A diagonalizável? E se considerarmos $A \in M_3(\mathbb{C})$?

15. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ o operador linear cuja matriz em relação à base

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ é } [T]_B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ache uma matriz real 4×4 inversível tal que $M^{-1}[T]_B M$ seja uma matriz diagonal.

16. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule A^{2011} .

17. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T \in L(V)$ tal que $T^2 = T$.
- (a) Prove que $V = \text{Ker}T \oplus \text{Im}T$.
- (b) É T diagonalizável? Por que?
18. Seja $T : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ o operador linear definido por $T(M) = M^t$. Mostre que se $\text{car}\mathbb{K} \neq 2$, então T é diagonalizável.
19. (a) Encontre um operador linear T que não é idempotente e tal que $T^2(T - I) = 0$.
- (b) Encontre um operador linear T que não é idempotente e tal que $T(T - I)^2 = 0$.
- (c) Mostre que se T é um operador linear tal que $T^2(T - I) = T(T - I)^2 = 0$ então T é idempotente.
20. Mostre que se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é diagonalizável, então a matriz A^m é diagonalizável qualquer que seja o número natural m , $m \geq 1$.
21. Exiba uma matriz A não diagonalizável tal que a matriz A^2 seja diagonalizável.
- Sugestão: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
22. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear inversível. Prove que:
- (a) Se λ é um valor próprio de T então $\lambda \neq 0$.
- (b) λ é um valor próprio de T se, e somente se λ^{-1} é um valor próprio de T^{-1} (onde T^{-1} é o operador inverso de T).
- (c) Se λ é um valor próprio de T , mostre que a multiplicidade algébrica de λ é igual à multiplicidade algébrica de $\frac{1}{\lambda}$.
23. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T \in L(V)$ de posto 1. Prove que ou T é diagonalizável ou T é nilpotente.
24. Seja $a \neq 0$ e seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ a matriz $A = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = a$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$. Prove que A é diagonalizável. Qual é o polinômio minimal de A ?
25. Verifique que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
26. Seja $A \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ a matriz $A = (a_{i1})_{1 \leq i \leq n}$. É AA^t diagonalizável?
27. Sejam $R_A, L_A : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ definidos respectivamente por $R_A(M) = MA$ e $L_A(M) = AM$. Prove que R_A e L_A são diagonalizáveis se, e somente se, A é diagonalizável.

28. Ache os polinômios característico e minimal de cada um das matrizes abaixo. Verifique se elas são ou não diagonalizáveis como matrizes *reais* e como matrizes *complexas*.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

29. Seja $T \in L(V)$ um operador diagonalizável e seja W um subespaço de V invariante sob T . Prove que a restrição de T a W , $T_W \in L(W)$ é diagonalizável.
30. Seja $T \in L(V)$ um operador linear tal que todo subespaço de V é invariante sob T . Mostre que T é um múltiplo do operador identidade.
31. Seja $T \in L(V)$ um operador linear e W um subespaço de V . Prove que W é invariante sob T se, e somente se, W° é invariante sob T^t .
32. Seja $T \in L(C([-1, 1]))$ o operador linear dado por

$$T(f)(x) = \int_{-1}^x f(t)dt, \text{ para toda } f \in C([-1, 1]).$$

Quais dos seguintes subespaços W de $C([0, 1])$ são invariantes sob T ?

- (a) W é o subespaço constituído pelas funções polinomiais.
- (b) $W = \{f \in C([-1, 1]) \mid f(0) = 0\}$.
- (c) $W = \{f \in C([-1, 1]) \mid f(x) = f(-x) \forall x \in [-1, 1]\}$.
- (d) W é o subespaço constituído pelas funções deriváveis no intervalo $] - 1, 1[$.
33. *Verdadeiro ou Falso?* Se uma matriz triangular A é semelhante a uma matriz diagonal, então A já é diagonal.
34. *Verdadeiro ou Falso?* Se os únicos autovalores de um operador diagonalizável T são 0 e 1, então T é uma projeção.
35. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e seja $T \in L(V)$. Prove que T é diagonalizável se, e somente se, para todo subespaço W de V invariante sob T existe um subespaço U **invariante sob** T tal que $V = W \oplus U$.
Observação: Um operador linear T é *semi-simples* quando todo subespaço de V invariante sob T tem um complementar que é também invariante sob T .
36. Seja $T \in L(V)$ um operador linear com $n = \dim V$ autovalores distintos.
- (a) Prove que todo operador linear que comuta com T é um polinômio em T .
- (b) Prove que V tem exatamente 2^n subespaços invariantes sob T e determine-os.

37. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e seja $T \in L(V)$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) T é diagonalizável e $T^{2n} = T^n$.

(b) $T^{n+1} = T$.

38. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz diagonalizável e seja

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

também diagonalizável. Mostre que a matriz

$$M = \begin{bmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$$

é diagonalizável.

39. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $T_A : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ o operador definido por $T_A(M) = AM - MA$. Prove que se A é diagonalizável então T_A é diagonalizável.

40. Seja $E \in L(V)$ uma projeção e $p(x) \in K[x]$ um polinômio. Então $p(E) = aI + bE$. Determine a e b em termos dos coeficientes de $p(x)$.

41. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base de V . Seja $T : V \rightarrow V$ o operador linear dado por

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que os subespaços $[v_1, v_2]$ e $[v_3, v_4]$ são invariantes sob T .

(b) Verifique que T não tem autovetores.

42. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$ e sejam $E_1, E_2, \dots, E_k \in L(V)$ tais que $E_1 + E_2 + \dots + E_k = I$.

(a) Prove que se $E_i E_j = 0$ se $i \neq j$, então $E_i^2 = E_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

(b) Prove que se $E_i^2 = E_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$ e $\text{car} \mathbb{K} = 0$, então $E_i E_j = 0$ sempre que $i \neq j$.