

MAT5730 - Álgebra Linear
Lista 3
2011

1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e sejam $f_1, \dots, f_r \in V^*$. Defina uma forma r -linear alternada $f = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}$ pondo

$$f(v_1, v_2, \dots, v_r) = \det(f_i(v_j))_{1 \leq i, j \leq r}.$$

($f = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r$ é o **produto exterior** dos funcionais $f_1, \dots, f_r$.)

- (a) Prove que $f = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r \neq 0$ se e somente se os funcionais $f_1, \dots, f_r$ são LI.
 (b) Prove que se $\{f_1, \dots, f_n\}$ é uma base de V^* então o conjunto das formas

$$f_J = f_{j_1} \wedge f_{j_2} \wedge \dots \wedge f_{j_r}, J = \{j_1 < \dots < j_r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$$

é uma base de $A_r(V)$.

2. Sejam $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$. Prove que

$$\det \begin{bmatrix} 0 & C \\ A & B \end{bmatrix} = (-1)^n \det A \det C.$$

3. Seja $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, com $a_{ij} = 0$ se $i < j$ (ou $a_{ij} = 0$ se $i > j$). Prove que

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

4. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

5. Calcule

$$\det \begin{bmatrix} a+1 & b & c & d \\ a & b+1 & c & d \\ a & b & c+1 & d \\ a & b & c & d+1 \end{bmatrix}.$$

6. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} = \det(A + iB) \det(A - iB).$$

[Sugestão: Seja $M = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$ e seja $P = \begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ -iI_n & -I_n \end{bmatrix}$. Prove que

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} A - iB & 0 \\ 0 & A + iB \end{bmatrix}.]$$

7. Calcule o determinante da matriz de Vandermonde, isto é, prove que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \dots & c_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (c_i - c_j).$$

8. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz anti-simétrica (isto é, $A^t = -A$). Prove que se n é ímpar e $\text{car}\mathbb{K} \neq 2$ então $\det A = 0$.
9. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Mostre que se A é inversível então existem no máximo n escalares c tais que $cA + B$ não é inversível.
10. Sejam $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{K})$ com D inversível e $CD = DC$. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC).$$

O que acontece quando D não é inversível?

11. Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Prove que $\det(I_m + AA^t) = \det(I_n + A^t A)$.
12. Seja $\sigma \in S_n$ e defina $T_\sigma : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ por $T_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ e onde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{K}^n$. Calcule $\det T_\sigma$.
13. Seja $p \in \mathbb{N}$, $p \geq n - 1$. Seja $c_{ij} = \binom{p+j}{i}$ o coeficiente binomial. Seja $M(n, p) = (c_{ij})_{0 \leq i, j \leq n-1}$. Calcule $\det M(n, p)$.
14. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz fixa e seja o operador linear $T_A : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ definido por $T_A(M) = AM - MA$. Prove que $\det T_A = 0$. Sejam também $R_A, L_A : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ definidos respectivamente por $R_A(M) = MA$ e $L_A(M) = AM$. Prove que $\det L_A = \det R_A = (\det A)^n$.

[Sugestão: Use o exercício 35 da Lista 1.]

15. Seja $C \in M_n(\mathbb{K})$ a matriz

$$C = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x + c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Prove que $\det C = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$.

16. Calcule o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

[Resposta: $a(b-a)(c-b)(d-c)$.]

17. Seja $\omega \in \mathbb{C}$ uma raiz n -ésima primitiva da unidade e seja $\Omega_n \in M_n(\mathbb{C})$ a matriz

$$\Omega_n = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Calcule $\Delta_n^2 = \det \Omega_n^t \Omega_n$.

[Resposta: $\Delta_n^2 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^n$.]