MAT5730 - Álgebra Linear
Lista 1
2011

1. Seja

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Prove que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um corpo. Prove também que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um $\mathbb{Q}$ -espaço vetorial. Exiba uma base desse espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

2. Sejam $\mathbb{L}$ e $\mathbb{K}$ corpos tais que $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$. Mostre que $\mathbb{L}$ pode ser visto como um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Isso é uma generalização de exercício anterior.
3. Ache uma base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$. Ache também uma base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ e uma base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$.
4. Seja V um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de dimensão n e seja $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V . Mostre que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{iv_1, iv_2, \dots, iv_n\}$ é uma base de V quando considerado como $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.
5. Mostre que o conjunto $\{\sin(x), \cos(x)\} \subset \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é L I. Mostre também que se $c_1, c_2, \dots, c_n$ são n números reais distintos, então o conjunto $\{e^{c_1x}, e^{c_2x}, \dots, e^{c_nx}\} \subset \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é L I.
6. Mostre que os conjuntos $\{\sin^2(x), \cos^2(x)\}$ e $\{1, \cos(2x)\}$ geram o mesmo subespaço de $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
7. Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$. Mostre que se $\{u, v, w\}$ é um subconjunto LI do espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ então o conjunto $\{u + v, u + w, v + w\}$ também é L I. Mostre que a hipótese de que $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ (isto é, $\text{car}\mathbb{K} = 0$) é essencial.
8. Encontre 3 vetores LD em $\mathbb{R}^3$, mas de modo que cada par deles seja LI.
9. Mostre que o conjunto $\{(2i, 1, 0), (2, -1, 1), (0, 1 + i, 1 - i)\}$ é uma base de $\mathbb{C}^3$ e ache as coordenadas do vetor $(1, 0, 1)$ em relação a essa base.
10. Seja W o subespaço de $\mathbb{C}^3$ gerado pelos vetores $w_1 = (1, 0, i)$ e $w_2 = (1 + i, 1, -1)$.
 - (a) Mostre que $\{w_1, w_2\}$ é uma base de W .
 - (b) Mostre que os vetores $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (1, i, 1 + i)$ estão em W e formam outra base de W .
 - (c) Quais são as coordenadas de w_1 e w_2 em relação à base $\{v_1, v_2\}$?
11. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e sejam U e W subespaços de V . Mostre que $U \cup W$ é um subespaço de V se, e somente se, $U \subset W$ ou $W \subset U$.
12. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo **infinito** $\mathbb{K}$. Mostre que V não é a união de um número finito de subespaços próprios. O resultado continua sendo verdadeiro se $\mathbb{K}$ for finito?
13. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo **infinito** $\mathbb{K}$. Sejam $W_1, W_2, \dots, W_n$ subespaços próprios de V e de mesma dimensão. Mostre que existe um subespaço U de V tal que $V = U \oplus W_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

14. Seja W um subespaço do espaço vetorial V . Mostre que existe um subespaço U de V tal que $V = U \oplus W$. É tal U único? Se $V = U \oplus W_1 = U \oplus W_2$, há alguma relação entre W_1 e W_2 ? E se $W_1 \subset W_2$?

15. Sejam U e W subespaços de V . Prove que se U e W têm dimensão finita, então $U + W$ tem dimensão finita e vale a fórmula:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

16. Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V de dimensão finita e tais que $V = U + W$. Mostre que $V = U \oplus W$ se, e somente se, $\dim V = \dim U + \dim W$.

17. Sejam $V = M_n(\mathbb{K})$, $W = \{(a_{ij}) \in V \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$ e $U = \{(a_{ij}) \in V \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i < j\}$.

(a) Descreva $U \cap W$.

(b) Ache $\dim U$, $\dim W$ e $\dim(U \cap W)$.

18. Seja $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ com $v_1 = (1, i)$ e $v_2 = (-i, 2)$. Ache as matrizes: $[T]_{can, B}$, $[T]_{B, can}$, $[Tr]_{can}$ e $[T]_B$. (Aqui can designa a base canônica de $\mathbb{C}^2$.)

19. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz fixa e seja $T_A : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ definida por

$$T_A(M) = AM - MA.$$

(a) Prove que T_A é uma transformação linear.

(b) Suponha que A é uma matriz diagonal com elementos distintos na diagonal, e que $\text{car} \mathbb{K} = 0$. Determine $\text{Ker} T_A$ e $\text{Im} T_A$. Calcule as dimensões desses subespaços.

20. Exiba uma função $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que seja $\mathbb{R}$ -linear mas que não seja $\mathbb{C}$ -linear.

21. Seja $0 \neq w \in \mathbb{C}$ um número complexo. Defina $T_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por $T_w(z) = wz$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Prove que T_w é $\mathbb{R}$ -linear e se $n \in \mathbb{Z}$, ache a matriz de $(T_w)^n$ na base $B = \{1, i\}$ de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.

22. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita. Mostre que as seguintes propriedades são equivalentes:

(a) V tem uma estrutura de $\mathbb{C}$ -espaço vetorial que **estende** a estrutura de $\mathbb{R}$ -espaço vetorial (isto é, se $*$ denota a multiplicação de um número complexo por um vetor $v \in V$, então $a * v = av$ para todo $a \in \mathbb{R}$).

(b) A dimensão de V é par.

(c) Existe um operador linear inversível $E \in L(V)$ tal que $E^2 = -I$.

[**Sugestão:** Para provar que (c) $\Rightarrow$ (a), defina $(a + ib) * v = av + bEv$ para todo número complexo $a + ib$ e para todo $v \in V$.]

23. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Sejam $T : V \rightarrow W$ e $S : W \rightarrow V$ transformações lineares. Mostre que se $\dim V > \dim W$ então a composta $S \circ T$ não é inversível.

24. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ linear tal que $\text{posto}(T^2) = \text{posto}(T)$. Prove que $\text{Ker} T \cap \text{Im} T = \{0\}$.

25. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ linear. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $\text{Ker}T^2 = \text{Ker}T$; (b) $\text{Im}T^2 = \text{Im}T$; (c) $\text{Ker}T \oplus \text{Im}T = V$;
 (d) $\text{Ker}T \cap \text{Im}T = \{0\}$; (e) $\text{Ker}T + \text{Im}T = V$.

26. Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Prove que as matrizes

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

são matrizes semelhantes em $M_n(\mathbb{C})$.

27. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e sejam $S, T \in L(V)$. Mostre que

$$T(\text{Ker}(S \circ T)) = \text{Ker}S \cap \text{Im}T.$$

28. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja $P \in L(V)$ uma **projeção**, isto é, $P^2 = P$. Prove que $V = \text{Ker}P \oplus \text{Im}P$. Mostre também que $I - P$ também é uma projeção e que $\text{Ker}(I - P) = \text{Im}P$ e $\text{Im}(I - P) = \text{Ker}P$.

29. Seja V um espaço vetorial e sejam P e Q em $L(V)$ duas projeções tais que $PQ = QP$. Prove que PQ e $R = P + Q - PQ$ também são projeções e que $\text{Ker}PQ = \text{Ker}P + \text{Ker}Q$, $\text{Im}PQ = \text{Im}P \cap \text{Im}Q$, $\text{Ker}R = \text{Ker}P \cap \text{Ker}Q$ e $\text{Im}R = \text{Im}P + \text{Im}Q$.

[**Sugestão:** Note que $R = I - (I - P)(I - Q)$.]

30. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$, com $\text{car}\mathbb{K} = 0$ e seja $P \in L(V)$ uma projeção. Prove que o traço de P é um número inteiro que é igual ao posto de P .

31. Seja V um espaço vetorial de dimensão 2 sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja T um operador linear em V tal que $T^2 = I$. Prove que ou $T = I$, ou $T = -I$, ou existe uma base B base de V tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

32. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ com $\text{car}\mathbb{K} \neq 2$ e seja T um operador linear em V tal que $T^2 = I$. Seja $W = \{v \in V \text{ tais que } Tv = v\}$ e $U = \{v \in V \text{ tais que } Tv = -v\}$. Prove que $V = W \oplus U$.

33. Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja T um operador linear em V tal que $T^n = 0$ e $T^{n-1} \neq 0$. Seja $v \in V$ tal que $T^{n-1}v \neq 0$. Prove que o conjunto

$$B = \{v, Tv, T^2v, \dots, T^{n-1}v\}$$

é uma base de V . Qual é a matriz $[T]_B$?

34. Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e sejam S e T duas transformações lineares de V em W , ambas de posto finito. Mostre que $S + T$ tem posto finito e que

$$|\text{posto}S - \text{posto}T| \leq \text{posto}(T + S) \leq \text{posto}S + \text{posto}T.$$

35. Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e sejam S e T dois operadores lineares em V . Suponha que $S \circ T = 0$ e que $S + T$ é sobrejetora. Mostre que

$$\text{posto}T + \text{posto}S = n.$$

36. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja $T \in L(V)$ tal que $T^2 = T$. Mostre que existem $S, U \in L(V)$ tais que $T = S \circ U$ e $U \circ S = 0$.

37. Seja $\mathbb{K}$ um corpo de característica igual a 0. Mostre que não existem matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ tais que $AB - BA = I_n$ ou com $AB - BA = E$, com $E \neq 0$ e $E^2 = E$. O resultado continua sendo verdadeiro se $\text{car}\mathbb{K} \neq 0$?

38. Seja T um operador linear de posto 1 em um espaço vetorial V . Mostre que existe um único escalar α tal que $T^2 = \alpha T$. Prove que se $\alpha \neq 1$, então $I - T$ é inversível.

39. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ matrizes idempotentes. É a seguinte afirmação verdadeira? “As matrizes A e B são semelhantes se, e somente se, elas têm o mesmo traço.”

40. *Verdadeiro ou Falso?* Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Suponha que $\dim V = n$ e $\dim U = m$, com $m > n$. Sejam $T \in L(U, V)$ e $S \in L(V, U)$. Então $S \circ T$ e $T \circ S$ não são inversíveis.

41. Sejam L_A e $R_A \in L(M_n(\mathbb{K}))$ as transformações lineares definidas por: $L_A(M) = AM$ e $R_A(M) = MA$ para toda matriz $M \in M_n(\mathbb{K})$. Determine $[L_A]_B$ e $[R_A]_C$, onde $B = \{E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{1n}, E_{2n}, \dots, E_{nn}\}$ e $C = \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, \dots, E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{nn}\}$.