

QUESTÃO 1

//

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A é a matriz companheira do polinômio
 $x^3 + x^2 - 5x + 3$.

$$\text{Logo } p_A(x) = m_A(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)^2(x+3)$$

$$\frac{m_A(x)}{x+3} = f_1(x) = (x-1)^2 \quad \frac{m_A(x)}{(x-1)^2} = f_2(x) = x+3$$

$$E_1 \ 16 = (x-1)^2 - (x+3)(x-5)$$

$$1 = \frac{1}{16} (x-1)^2 + \left(-\frac{1}{16} (x-5) \right) (x+3)$$

$$E_1 = \frac{1}{16} (A - I)^2 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -2 & 6 & -18 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = -\frac{1}{16} \begin{bmatrix} -5 & 0 & -3 \\ 1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 15 & 3 & -9 \\ 2 & 10 & 18 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} D = \frac{-3}{16} E_1 + E_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = A - D \end{cases}$$

$$D = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -3 & 9 & -27 \\ -6 & -18 & 54 \\ -3 & 9 & -27 \end{bmatrix} + \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 15 & 3 & -9 \\ 2 & 10 & 18 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 12 & 12 & -36 \\ 8 & -8 & 72 \\ -4 & 12 & -20 \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

QUESTÃO 2

(2) Como A é a matriz companheira do polinômio $x^4 - 1$, temos que

$$p_T(x) = m_T(x) = p_A(x) = m_A(x) = x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

Pelo Teorema da Decomposição Primária,

$$\mathbb{R}^4 = \underbrace{\text{Ker}(T-I)}_{W_1} \oplus \underbrace{\text{Ker}(T+I)}_{W_2} \oplus \underbrace{\text{Ker}(T^2+I)}_{W_3}$$

Seja B_i base de W_i , $i=1,2,3$.

$$B_1 = \{(1, 1, 1, 1)\} \quad B_2 = \{(1, -1, 1, -1)\}$$

$$m_{T|W_3} = x^2 + 1 \quad ; \quad \text{Queremos que } [T|_{W_3}]_{B_3} = \text{matriz companheira de } x^2 + 1.$$

Tomo então $v = (1, 0, -1, 0) \in W_3$ e $Tv = (0, 1, -1, 0)$.

$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ é uma base de $\mathbb{R}^4$
tal que $[T]_B = C$

QUESTÃO 3

(a) Faltou a hipótese de A inversível!

Se A é inversível, A^3 é inversível e os autovalores de A^3 são todos diferentes de 0.

Como A^3 é diagonalizável, $m_{A^3}(x)$ é um produto de fatores lineares distintos.

Suponha $m_{A^3}(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)$,
com $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$.

Seja $f(x) = (x^3 - a_1)(x^3 - a_2) \dots (x^3 - a_k)$.

Observe que $f(A) = m_{A^3}(A^3) = 0$.

Logo $m_A(x) \mid f(x)$.

Agora, para cada $a \in \mathbb{C}$, o polinômio $x^3 - a$ tem 3 raízes distintas.

Escreva $a = |a|(\cos \theta + i \sin \theta)$. Então

uma raiz cúbica de a é $x_1 = |a|^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right)$.

As outras duas são $x_2 = x_1 \omega$ e $x_3 = x_1 \bar{\omega}$

onde $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

Logo $x^3 - a$ tem três raízes distintas.

Assim, todas as raízes do polinômio $f(x)$ são distintas. Como $m_A(x) \mid f(x)$, $m_A(x)$ também só tem raízes distintas o que implica que A é diagonalizável.

OBSERVAÇÃO: Se 0 for autovalor de A^3 , o resultado pode não ser verdadeiro.

Tome $A \in M_3(\mathbb{C})$, $A = E_{11} + E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A não é diagonalizável, pois E_{11} é diagonalizável,

E_{23} nilpotente e $E_{23}E_{11} = E_{11}E_{23} = 0$.

Mas $A^3 = E_{11}^3 + 3E_{11}^2E_{23} + 3E_{11}E_{23}^2 + E_{23}^3 = E_{11}$

que é diagonalizável!

QUESTÃO 3

(b) $(\Rightarrow) A \sim B \Rightarrow \text{tr} A = \text{tr} B.$

($\Leftarrow$) Se $A^2 = A$ e $B^2 = B$, então

A e B são diagonalizáveis, pois

$$m_A(x) \mid x(x-1) \quad (m_B(x) \mid x(x-1))$$

que só tem raízes distintas.

Assim $A = 0$ ou A é semelhante a

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = E$$

Mas então $\text{tr} A =$
multiplicidade de 1
como raiz do polinômio
característico!

(já que $\text{car} K \neq 0$).

Se $\text{tr} A = \text{tr} B$, A e B são semelhantes a
mesma matriz diagonal E e portanto, $A \sim B$.

(c) 1º caso: $p_T(x)$ tem duas raízes reais distintas
 λ_1 e λ_2 .

Nesse caso, basta tomar $v_0 \neq v_i \in \mathbb{R}^n$

$$T v_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2.$$

$W = \langle v_1, v_2 \rangle$ é tal que $\dim W = 2$
e W é invariante sob T .

2º caso: $p_T(x) = (x-a)^n$ e $m_T(x) = (x-a)^k$,
 $1 \leq k \leq n$.

Se $k=1 \Rightarrow m_T(x) = x-a \Rightarrow T = aI$
e não há nada a fazer! (Todo subespaço é inv. sob T !)

Se $k \geq 2$, seja $v \in \mathbb{R}^n$ tal que
 $(T-aI)^{k-1} v \neq 0$. (Tal v existe pois
 $m_T(x) = (x-a)^k$.)

Então $(T-aI)^{k-2} v \neq 0$.

Seja $W = \langle w, Tw \rangle = Z(w; T)$
Afirmção: $m_{T,w} = (x-a)^2 |K[x]$

De fato: $(T-aI)^2 w = (T-aI)^k v = 0$,
Portanto $m_{T,w}(x) \mid (x-a)^2$. Como $w \neq 0$,
 $m_{T,w}(x) = (x-a)$ ou $(x-a)^2$.
Se $m_{T,w} = x-a$, teríamos $(T-aI)^{k-1} v = 0$,
contra a escolha de v . Logo $m_{T,w}(x) = (x-a)^2$.
Como grau $m_{T,w}(x) = 2$, temos que
 $\dim W = \dim Z(w; T) = \text{grau } m_{T,w}(x) = 2$
e W é invariante sob T .

3º caso: Os polinômios irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$
são de grau 1, ou de grau 2 do tipo
 x^2+ax+b , com $\Delta = a^2 - 4b < 0$.

Suponha que $p(x) = x^2+ax+b$ irredutível
em $\mathbb{R}[x]$ e $\text{tg } p(x) \mid m_T(x)$.

Então $m_T(x) = p(x)^{k_1} p_1(x)^{m_1} \dots p_r(x)^{m_r}$, com
 $r \geq 0$ e $k_i \geq 0$ e $p_1, p_2, \dots, p_r$ irredutíveis
distintos.

Pelo Teorema da Decomposição Primária

podemos escrever
 $\mathbb{R}^n = \text{Ker } p(T)^{k_1} \oplus \text{Ker } p_1(T)^{m_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker } p_r(T)^{m_r}$.

Seja $U = \text{Ker } p(T)^{k_1}$. Sabemos que se $T|_U = T_U$,
então $m_{T_U}(x) = p(x)^{k_1}$.

Agora, tome $w \in U$ com $p(T)^{k_1-1} w \neq 0$.

É fácil ver que $m_{T,w}(x) = p(x)$ e se
 $W = Z(w; T)$, então W é invariante sob T
e $\dim W = 2$. //

QUESTÃO 4

(a) Se $0 \neq v \in V$ então $1 \leq \text{grau } m_{T,v}(x)$.

Mas $m_{T,v}(x) \mid m_T(x) \mid p_T(x)$. Como $\text{grau } m_{T,v}(x) \geq 1$ e $p_T(x)$ é irredutível em $K[x]$ temos que ter

$$m_{T,v}(x) = p_T(x).$$

$$\text{Logo } \dim Z(v; T) = \text{grau } m_{T,v}(x) = \text{grau } p_T(x) = \dim V.$$

$$\text{Assim } V = Z(v; T).$$

(b) Se $m_T(x) = p(x)^k$ e $k > 1$, existe $v \in V$ tal que $p(x)^{k-1} v \neq 0$.

$$\text{Se } w = p(x)^{k-1} v \text{ então } m_{T,w}(x) = p(x) \text{ e } \dim Z(w; T) = \text{grau } p(x) < \text{grau } p(x)^k \leq \text{grau } p_T(x) \quad (\text{pois } k > 1)$$

$\parallel$
 $\dim V$

Logo w NÃO é um vetor cíclico para T .

(c) Se $m_T(x) = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \dots p_k(x)^{m_k}$ com p_i 's irredutíveis distintos, temos pelo Teorema da Decomposição primária que

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \text{ com } W_i = \text{Ker } p_i(T)^{m_i} \text{ e se } T_i = T|_{W_i}, \text{ então } m_{T_i}(x) = p_i(x)^{m_i}.$$

Se $k > 1$, $\dim W_1 < \dim V$ e portanto nenhum vetor de W_1 é um vetor cíclico para T . (Como W_1 é invariante sob T , $Z(w; T) \subset W_1 \forall w \in W_1$.)

Se $k = 1$, $m_T(x) = p_1(x)^{m_1}$ e como $m_T(x)$ não é irredutível temos que ter $m_1 > 1$ e caímos no caso (b). //

/ /

(d) Se todo $0 \neq v \in V$ é um vetor cíclico para T , então existe um vetor cíclico para T . Logo $m_T(x) = p_T(x)$.

Se $m_T(x)$ não é irredutível, temos, por (c) que existe $0 \neq v \in V$ tal que v não é um vetor cíclico para T .

Portanto $m_T(x)$ é irredutível em $K[x]$.

Logo $p_T(x) = m_T(x)$ irredutível em $K[x]$.