Estimação no Domínio do tempo: Covariâncias e modelos ARIMA

Airlane Pereira Alencar

20 de Abril de 2022

Índice

Estacionariedade

Processo estocástico

É uma família $Z = \{Z(t), t \in T\}$ em que $Z(t)$ é variável aleatória.

Série Temporal

É uma particular realização do processo estocástico.

Fracamente estacionário ou de 2a ordem

- $E(Z_t) = \mu, \forall t \in T$;
- $E(Z_t^2) < \infty, \forall t \in T$;
- $Cov(Z_{t_1}, Z_{t_2}) = \gamma(|t_1 - t_2|)$, ou seja, a covariância é função somente de $|t_1 - t_2|$.

Propriedades da Função de Autocovariância

Processos estacionários são bem caracterizados por sua média μ e sua fac. (Cramér e Leadbetter, 1967, p.80) (FAC n.neg.def.)
Seja $Z = \{Z(t), t \in \mathbb{Z}\}$ um processo estacionário real com tempo discreto com função de autocovariância denotada como $\gamma_\tau = Cov(Z_t, Z_{t+\tau})$.

- $\gamma_0 > 0$;
- $\gamma_{-\tau} = \gamma_\tau$;
- $|\gamma_\tau| \leq \gamma_0$;
- γ_τ é não negativa definida no sentido que $\forall a_j, a_k$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j a_k \gamma_{\tau_j - \tau_k} \geq 0.$$

Propriedades da Função de Autocovariância

- $\gamma_0 = Var(Z_t) > 0$;
- $\gamma_{-\tau} = Cov(Z_t, Z_{t-\tau}) = Cov(Z_{t+\tau}, Z_t) = \gamma_\tau$;
- $|\gamma_\tau| \leq \gamma_0$;
  $E(\tilde{Z}_{t+\tau} \mp \tilde{Z}_t)^2 = E(\tilde{Z}^2_{t+\tau} \mp 2\tilde{Z}_{t+\tau}\tilde{Z}_t + \tilde{Z}^2_t) \geq 0 \Rightarrow \gamma_0 \mp \gamma_\tau \geq 0$
- γ_τ é não negativa definida no sentido que $\forall a_j, a_k$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j a_k \gamma_{\tau_j - \tau_k} \geq 0.$$

$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j a_k \gamma_{\tau_j-\tau_k} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j a_k Cov(Z_{\tau_j}, Z_{\tau_k}) =$
$E[\sum_j a_j Z_{\tau_j}]^2 \geq 0$

Propriedades da Função de Autocovariância

Observação

- A função de autocorrelação do processo estocástico $Z = \{Z(t), t \in \mathbb{Z}\}$ é

$$\rho_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\sqrt(\gamma_0)\sqrt(\gamma_0)} = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0}$$

  $\hat{\rho}_\tau$ vai auxiliar a propormos modelos.
- Um exemplo de processo estocástico contínuo (tempo contínuo) é o movimento Browniano (MT p.33);
- A função de autocorrelação de um processo estocástico estacionário decai para 0;

Estimação

$Z = \{Z(t), t \in \mathbb{Z}\}$ processo estacionário

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= \overline{Z} \\
E(\overline{Z}) &= E\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Z_t\right) = \mu \\
Var(\overline{Z}) &= \frac{1}{T^2} Var\left(\sum_{t=1}^{T} Z_t\right) = \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{n} Cov(Z_t, Z_s) \\
&= \frac{1}{T^2}\sum_{k=-(T-1)}^{T-1} (T - |k|)\,\gamma_k = \frac{1}{T}\sum_{k=-(T-1)}^{T-1} \left(1 - \frac{|k|}{T}\right)\rho_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Para processo estacionário $\sum_{k=-(T-1)}^{T-1} \left(1 - \frac{|k|}{T}\right)\rho_k$ é finita pois $\rho_k \to 0$.

Estimação

- O estimador da função de autocovariância (γ_j) é

$$\hat{\gamma}_j = c_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-j}[(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+j} - \bar{Z})],\ j = 0, 1, \ldots, T-1.$$

- Poderíamos considerar:

$$\hat{\hat{\gamma}}_j = \frac{1}{T-j}\sum_{t=1}^{T-j}[(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+j} - \bar{Z})],\ j = 0, 1, \ldots, T-1.$$

Esse pode ter um viés um pouco menor, mas não é função não negativa definida como é $\hat{\gamma}_j$, logo $\hat{\gamma}_j$ deve ser utilizado (Wei).

Estimação

Estimador da função de autocorrelação

$$
\begin{aligned}
\rho_j &= Corr(Z_t, Z_{t+j}) = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} \\
\hat{\rho}_j &= r_j = \frac{\hat{\gamma}_j}{\hat{\gamma}_0},\ j = 0, 1, \ldots, T-1.
\end{aligned}
$$

No R: acf( ).

Estimação

Distribuição Assintótica - Bartlett, 1946

$a = \{a(t), t \in \mathbb{Z}\}$ processo **Ruído Branco**
Para n grande, $\hat{\rho}_j$ tem distribuição normal com média ρ_j e variância

$$Var(\hat{\rho}_j) = \frac{1}{T}.$$

- Assim, podemos usar esse resultado para construir intervalos para verificar para cada lag j, se $\rho_j = 0$ ou não.
- Cada intervalo é $0 \mp 1.96\sqrt{1/T}$.
- Vide Property P1.1 p.30. e Teorema A.7 - Apêndice A de Shumway and Stoffer.

Ajuste de modelos ARIMA(p,d,q).
Análise descritiva: série veio de processo estacionário?

- Tirar tendência e sazonalidade determinística e ”efeitos”de outras var.
  $X_t = \mu_t + e_t$, em que e_t é estacionário talvez ARMA
  $\mu_t = tendencia(t) + sazon(t) + tend2(t)$
  Exemplo: Produção industrial com mudança de tendência em 2008 e 2014 + AR(4)
  Evitar regressão espúria.
- Se parece ter tendência estocástica: Diferenças
  $Z_t = \Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t$ ou
  $Z_t = \Delta^{12} X_t = (1 - B^{12}) = X_t - X_{t-12}$
  Se tira uma diferença e ΔX_t parece estacionária, dizemos $X_t \sim I(1)$.

Metodologia

- **Especificação**: Definir classe de modelos. ex:ARIMA(p,d,q)
- **Identificação**: Tirar tendências e com base na FAC e FACP propor (p,q)
- **Estimação** dos parâmetros
- **Verificação**: Análise de resíduos padronizados como RB, gaussiano
- Depois, inferência e **previsão**

AR(p)

Para Z_t estacionário, $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_t &= \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t \\ (1 - \phi_1 B - \ldots)\tilde{Z}_t &= a_t \\ \Phi(B)\tilde{Z}_t &= a_t \end{aligned}$$

com $a_t \sim RB$ e $\Phi(B)$ é o polinômio característico.

$$\begin{aligned} Z_t - \mu &= \phi_1(Z_{t-1} - \mu) + \ldots + \phi_p(Z_{t-p} - \mu) + a_t \\ Z_t &= \mu(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p) + \phi_1 Z_{t-1} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \\ Z_t &= \alpha + \phi_1 Z_{t-1} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \end{aligned}$$

Exemplo AR(1) estacionário

$$Z_t = \alpha + \phi Z_{t-1} + a_t$$

Vamos considerar $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$.

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_t &= \phi \tilde{Z}_{t-1} + a_t = \phi(\phi \tilde{Z}_{t-2} + a_{t-1}) + a_t \\
&= \phi^2 \tilde{Z}_{t-2} + \phi a_{t-1} + a_t \\
&= \vdots \\
&= \phi^k Z_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j a_{t-j} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j a_{t-j} \\
&= \Psi(B) a_t = (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \ldots) a_t
\end{aligned}$$

AR(p) - Momentos

Sob estacionariedade, temos

$$\begin{aligned}
E(Z_t) &= \alpha + \phi_1 E(Z_{t-1}) + \ldots + \phi_p E(Z_{t-p}) \Rightarrow \mu = \alpha + \phi_1 \mu + \ldots \phi_p \mu \Rightarrow \\
\mu &= \frac{\alpha}{1 - \phi_1 \ldots - \phi_p} \\
\gamma_0 &= Cov(\phi_1 Z_{t-1} + \ldots + \phi_j Z_{t-j} + a_t, Z_t) = \phi_1 \gamma_1 + \ldots + \phi_p \gamma_p + \sigma_a^2 \\
1 &= \phi_1 \rho_1 + \ldots + \phi_p \rho_p + \frac{\sigma_a^2}{\gamma_0} \\
\gamma_0 &= \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \ldots - \phi_p \rho_p}
\end{aligned}$$

Para $j > 0$

$$\begin{aligned}
\gamma_j &= Cov(Z_t, Z_{t-j}) = Cov(\phi_1 Z_{t-1} + \ldots + \phi_j Z_{t-j} + a_t, Z_{t-j}) \\
&= \phi_1 \gamma_{j-1} + \ldots + \phi_p \gamma_{j-p}
\end{aligned}$$

FAC AR(p)

Dividindo pela variância γ_0

$$
\begin{aligned}
\rho_j &= \phi_1\rho_{j-1} + \ldots + \phi_p\rho_{j-p} \qquad (1)\\
\Phi(B)\rho_i &= 0 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Correlação em (2) para $j = 1, \ldots, p$, temos as **Equações de Yule-Walker**:

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2\rho_1 \ldots + \phi_p\rho_{p-1}\\
\rho_2 &= \phi_1\rho_1 + \phi_2 \ldots + \phi_p\rho_{p-2}\\
\rho_p &= \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} \ldots + \phi_p
\end{aligned}
$$

Podemos estimar $\phi_i, i = 1, \ldots, p$, μ e σ^2 pelo método dos momentos.

Exercícios

- Para modelo AR(3), obter estimadores de ϕ_i usando método dos Momentos.
- Encontrar as raízes do polinômio característico para AR(2) e verifique que as condições de estacionariedade equivalem a $\phi_2 + \phi_1 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$ e $|\phi_2| < 1$.

ARMA(p,q)

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_t &= \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \ldots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \ldots - \theta_q a_{t-q} \\
(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B)\tilde{Z}_t &= (1 - \theta_1 B \ldots - \theta_q B^q) a_t \\
\Phi(B)\tilde{Z}_t &= \Theta(B) a_t
\end{aligned}$$

com $a_t \sim RB$

- Estacionário: se as raízes de $\Phi(B) = 0$ estiverem fora do círculo unitário
- Invertível: se as raízes de $\Theta(B) = 0$ estiverem fora
- FAC e FACP parece cair para zero e deve propor valores (p,q) até ter resíduo como RB
- Deve propor valores (p,q) até ter resíduo como RB

Exercícios ARMA(p,q)

- SS(2006): ARMA(2,2):
  $(1 - 0,4B - 0,45B^2)x_t = (1 + B + 0,25B^2)a_t$
  Estacionário? Invertível? Pode ser reduzido a ARMA(1,1).
- MT(2006): $X_t \sim ARMA(p_x, q_x)$ e $Y_t \sim ARMA(p_y, q_y)$, X_t e Y_t são independentes e $Z_t = X_t + Y_t$. Verifique que $Z_t \sim ARMA(p, q)$ com $p = p_x + p_y$ e $q \leq max(p_x + q_y, q_x + p_y)$
- SS(2006) Invertível MA - Identificabilidade

Modelos ARIMA(p,d,q)

X_t não estac. $\Rightarrow Z_t = \Delta^d X_t$ estacionário $\Rightarrow Z_t \sim ARMA(p,q)$
$\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$.

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_t &= \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \ldots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots \theta_q a_{t-q} \\ (1 - \phi_1 B - \ldots)\tilde{Z}_t &= (1 - \theta_1 B - \ldots \theta_q B^q) a_t \\ \Phi(B)\tilde{Z}_t &= \Theta(B) a_t, \end{aligned}$$

$a_t \sim RB(0, \sigma^2)$.

- Estimação de ARIMA consiste na estimação do ARMA(p,q)
- Máxima verossimilhança cond.: $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$ indep.
- Generalizações: outras dist como a t, variância não constante, inclusão de covariáveis.

Estimação ARIMA - Verossimilhança Condicional

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \ldots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\begin{aligned} E(\tilde{Z}_t|past) &= \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \ldots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q} \\ Var(\tilde{Z}_t|past) &= \sigma_a^2 \\ \tilde{Z}_t|past &\sim N(E(\tilde{Z}_t|past), \sigma_a^2) \end{aligned}$$

Verossimilhança Condicional a valores iniciais de $\tilde{Z}_t$'s e a's (MT).

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &= f(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_T | valores\ iniciais) = \prod_{t=1}^{T} f_{\boldsymbol{\theta}}(\tilde{z}_t|\tilde{z}_{t-1}, \ldots) \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}}\right]^T exp\left\{-\sum_{t=1}^{T} \frac{[\tilde{Z}_t - E(\tilde{Z}_t|past)]^2}{2\sigma_a^2}\right\} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}}\right]^T exp\left\{-\sum_{t=1}^{T} \frac{a_t^2}{2\sigma_a^2}\right\} \end{aligned}$$

Estimação ARIMA

Log-Verossimilhança Condicional

$$
\begin{aligned}
l(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{T}{2} ln(\sigma_a^2) - \frac{S(\eta|\tilde{z}_t, past)}{2\sigma_a^2} \\
S(\eta|\tilde{z}_t, past) &= \sum_{t=1}^{T} a_t^2(\eta|\tilde{\mathbf{Z}}, past)
\end{aligned}
$$

$\eta = (\phi, \boldsymbol{\theta})$ em MT (poderia incluir μ ou intercepto e efeitos)

- Escolha dos p valores iniciais $\tilde{Z}_0, \tilde{Z}_{-1}, \ldots, \tilde{Z}_{-p+1}$ e q valores iniciais de $a_t (= E(a_t) = 0)$
- Predizer a_t fixando η (ex.7.1. MT(2018))

Estimação ARIMA

- Escolha dos p valores iniciais $\tilde{Z}_0, \tilde{Z}_{-1}, \ldots, \tilde{Z}_{-p+1}$ e q valores iniciais de $a_t (= E(a_t) = 0)$
  ex: $Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} - \theta_1 a_{t-1} + a_t,\ a_t \sim iidN(0, \sigma^2)$
  Precisa fixar os valores iniciais y_0 e a_0.
  Prediz a sequência de erros usando os estimadores iniciais de $\eta = (c, \phi, \theta)$:
  $a_t = y_t - c - \phi y_{t-1} + \theta a_{t-1}$

$$lnL(\Theta) = -\frac{T}{2} ln(2\pi) - \frac{T}{2} ln(\sigma^2) - \sum_{t=1}^{T} \frac{(y_t - c - \phi y_{t-1} + \theta a_{t-1})^2}{2\sigma^2}$$

  Atualiza os valores dos parâmetros, recalcula os erros,....
- Predizer a_t fixando parâmetro η (ex.7.1. MT(2018))

Estimação ARIMA

- Escolha dos p valores iniciais $\tilde{Z}_0, \tilde{Z}_{-1}, \ldots, \tilde{Z}_{-p+1}$ e q valores iniciais de $a_t (= E(a_t) = 0)$
  ex: $Y_t = c + \beta x_t + \phi_1 Y_{t-1} - \theta_1 a_{t-1} + a_t,\ a_t \sim iidN(0, \sigma^2)$
  Precisa fixar os valores iniciais y_0 e a_0.
  Prediz a sequência de erros usando os estimadores iniciais de $\eta = (c, \beta, \phi, \theta)$:
  $e_t = y_t - c - \beta x_t - \phi y_{t-1} + \theta a_{t-1}$

$$lnL(\Theta) = -\frac{T}{2} ln(2\pi) - \frac{T}{2} ln(\sigma^2) - \sum_{t=1}^{T} \frac{(y_t - c - \beta x_t - \phi y_{t-1} + \theta a_{t-1})^2}{2\sigma^2}$$

  Atualiza os valores dos parâmetros, recalcula os erros,....
- Predizer a_t fixando η (ex.7.1. MT(2018))

Estimação ARIMA

- **Não condicional**
  - Agora, Esperança não condicional ao passado

$$[a_t(\eta|\tilde{\mathbf{Z}}, past)] = E[(a_t|\eta, W)]$$

  - Precisa de backforecasting, usando equivalência entre

$$\mathbf{\Phi}(B)W_t = \mathbf{\Theta}(B)a_t \quad \mathbf{\Phi}(F)W_t = \mathbf{\Theta}(F)e_t$$

- Verossimilhança exata: AR(1) em MT inclui parâmetro para média de Z_0, Z_{-1}

Variância dos estimadores

$\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$ é $k \times 1, k = p + q$
Para n grande, estimador de MV

$$\widehat{\eta} \quad {}^{D}\!\rightarrow \quad N_k(\eta, \mathbf{V}) \tag{3}$$

$$\mathbf{V} \quad = \quad 2\sigma_a^2 \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 S(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_1 \partial \eta_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 S(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_k \partial \eta_k} & \cdots & \frac{\partial^2 S(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_n^2} \end{bmatrix}^{-1} \tag{4}$$

EMV de σ^2 é $\widehat{\sigma}_a^2 = \frac{S(\widehat{\eta})}{n}$
Para n grande $\widehat{\sigma}^2$ e $\widehat{\eta}$ são não correlacionados
Ex: AR(1): $var(\widehat{\phi}) \approx \frac{1-\phi^2}{n}$ e MA(1): $var(\widehat{\theta}) \approx \frac{1-\theta^2}{n}$

Modelo espaço de estados

- Os modelos ARMA podem ser escritos como modelo espaço de estados.
- Filtro de Kalman para predizer as variáveis latentes
- Arima da library(forecast)
- Propor prioris e estimar maximizando a dist. a posteriori

Referências

All Time series analysis

- Morettin e Toloi
- Shumway and Stoffer
- Wei item Hyndman. Forecasting