Processos ARMA estacionários: modelos AR, MA e mistos, ARIMA, modelo linear geral e modelos harmônicos

Airlane Pereira Alencar

11 de Abril de 2022

Índice

Ajuste de modelos ARIMA(p,d,q).
Análise descritiva: série estacionária?

- Operador defasagem $BX_t = X_{t-1}$ e $B^{12}X_t = X_{t-12}$
- Se parece ter tendência estocástica: Diferenças
  $Y_t = \Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t$ ou
  $Y_t = \Delta^{12} X_t = X_t - X_{t-12} = (1 - B^{12})X_t$
- Tirar tendência e sazonalidade determinística e ”efeitos” de outras variáveis
  Evitar regressão espúria

Metodologia

Para processos estacionários:

- **Especificação**: Definir classe de modelos. ex:ARIMA
- **Identificação**: Com base na FAC e FACP, propor (p,q)
- **Estimação** dos parâmetros
- **Verificação**: Análise de resíduos padronizados como RB, gaussiano
- Depois, **previsão** e correspondentes ICs

Modelo Linear Geral

Z_t é dito **processo linear geral** se pode ser expresso como

$$
\begin{aligned}
Z_t &= \mu + \sum_{u=0}^{\infty} \psi_u a_{t-u} = \mu + \psi_0 a_t + \psi_1 a_{t-1} + \dots && (1) \\
&= \mu + \Psi(B) a_t && (2) \\
&= \mu + (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) a_t && (3)
\end{aligned}
$$

com $a_t \sim RB$.
$\Psi(B)$ é dita função de transferência do filtro
Se $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, o processo é estacionário de $2a$ ordem (var. e covar. finitas).

Processo linear geral

Valendo $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$,

$$
\begin{aligned}
E(Z_t) &= \mu \\
Cov(Z_t, Z_{t+j}) &= Cov(\sum_{u=0}^{\infty} \psi_u a_{t-u}, \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t+j-i}) \\
&= Cov(\psi_0 a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} \ldots, \\
, \quad & \quad \psi_0 a_{t+j} + \psi_1 a_{t+j-1} + \psi_2 a_{t+j-2} \ldots) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+j} \right) \sigma^2 \\
Var(Z_t) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \right) \sigma^2
\end{aligned}
$$

Forma Invertível (AR(∞))

Para processo estacionário Z_t, a variável centrada $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$

$$\tilde{Z}_t = \pi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \pi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \ldots + a_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{Z}_{t-j} + a_t$$

$\tilde{Z}_t$ como média ponderada do passado

$$(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j)\tilde{Z}_t = a_t$$

$$\Pi(B)\tilde{Z}_t = a_t$$

Como tínhamos $\tilde{Z}_t = \Psi(B)a_t$:

$$\Pi(B)\Psi(B)a_t = a_t \Rightarrow \Pi(B) = \Psi^{-1}(B) \text{ ou } \Psi(B) = \Pi^{-1}(B)$$

Utilizaremos para obter os coeficientes.

Estacionariedade

Prop. Box, Jenkins,Reinsel, 1994:

Um processo linear é
estacionário se a série $\Psi(B) = \psi_0 + \psi_1 B + \ldots$ convergir para $|B| \leq 1$;
invertível se a série $\Pi(B) = \pi_0 + \pi_1 B + \ldots$ convergir para todo $|B| \leq 1$.

O espectro de processo estacionário para $t \in \mathbb{Z}$ com $\sum_{k=1} |\gamma_k| < \infty$ é

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\lambda k}$$

e para PLG temos

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi} |\Psi(e^{-i\lambda}|^2, -\pi \leq \lambda \leq \pi, \Psi(e^{-i\lambda}) = \psi_0 + \psi_1 e^{-i\lambda} + \psi_2 e^{-2i\lambda} + \ldots$$

AR(p)

Def 4:

Um processo estocástico Z_t, com $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$, é AR(p) se

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_t &= \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t \\
(1 - \phi_1 B - \ldots)\tilde{Z}_t &= a_t \\
\Phi(B)\tilde{Z}_t &= a_t
\end{aligned}$$

com $a_t \sim RB$ e $\Phi(B)$ é dito polinômio característico.

$$\begin{aligned}
Z_t - \mu &= \phi_1 (Z_{t-1} - \mu) + \ldots + \phi_p (Z_{t-p} - \mu) + a_t \\
Z_t &= \mu(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p) + \phi_1 Z_{t-1} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \\
Z_t &= \alpha + \phi_1 Z_{t-1} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + a_t
\end{aligned}$$

Exemplo AR(1) estacionário

$$Z_t = \alpha + \phi Z_{t-1} + a_t$$

Vamos considerar $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$.

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_t &= \phi \tilde{Z}_{t-1} + a_t = \phi(\phi \tilde{Z}_{t-2} + a_{t-1}) + a_t \\
&= \phi^2 \tilde{Z}_{t-2} + \phi a_{t-1} + a_t \\
&= \vdots \\
&= \phi^k \tilde{Z}_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j a_{t-j}
\end{aligned}$$

Se $|\phi| < 1$, temos para $k \to \infty$, $\tilde{Z}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j a_{t-j}$ é processo linear geral com $\psi_i = \phi^j$.

Exemplo 1 - AR(1)

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z}_t &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j a_{t-j} \\
&= \Psi(B) a_t = (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \ldots) a_t
\end{aligned}
$$

$\Psi(B)$ converge $\forall |B| \leq 1$ se $|\phi| < 1$.
Sob estacionariedade, $|\phi| < 1$, temos

$$
\begin{aligned}
E(Z_t) &= \alpha + \phi E(Z_{t-1}) \Rightarrow \mu = \alpha + \phi\mu \Rightarrow \mu = \frac{\alpha}{1-\phi} \\
Var(Z_t) &= \phi^2 Var(Z_{t-1}) + \sigma_a^2 \Rightarrow \gamma_0 = \phi^2\gamma_0 + \sigma_a^2 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi^2} \\
\gamma_k &= Cov(\alpha + \phi Z_{t-1} + a_t, Z_{t-k}) = \phi\gamma_{k-1} = \phi^k \gamma_0 \\
\rho_k &= \phi\rho_{k-1} = \phi^k
\end{aligned}
$$

Invertibilidade do AR(p)

O processo AR(p) já é invertível pois já temos Z_t em função do passado.

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z}_t &= \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t \\
(1 - \phi_1 B - \ldots)\tilde{Z}_t &= a_t \\
\Phi(B)\tilde{Z}_t &= a_t
\end{aligned}
$$

$\Pi(B) = \Phi(B)$ é finito.

Estacionariedade do AR(p)

$$\begin{aligned}\Phi(B) &= 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 + \ldots - \phi_p B^p \\ &= (1 - G_1 B)(1 - G_2 B)\ldots(1 - G_p B)\end{aligned}$$

sendo $G_1^{-1}, \ldots, G_p^{-1}$ as raízes da equação característica $\Phi(B) = 0$.
Expandindo $\Phi^{-1}(B)$ em frações parciais

$$\Psi(B) = \Phi^{-1}(B) = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{1 - G_i B}$$

Para ter estacionariedade (PLG), Ψ tem que convergir para $|B| \leq 1$ e precisamos ter $|G_i| < 1, i = 1, \ldots, p$.
Como G_i^{-1} são as raízes, então devemos ter as raízes > 1.
AR(p) é **estacionário** se as raízes do polinômio característico $\Phi(B)$ estão fora do círculo unitário.

FAC do AR(p)

Para $j > 0$

$$\begin{aligned}\gamma_j &= Cov(Z_t, Z_{t-j}) = Cov(\phi_1 Z_{t-1} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + a_t, Z_{t-j}) \\ &= \phi_1 \gamma_{j-1} + \ldots + \phi_p \gamma_{j-p}\end{aligned}$$

Dividindo pela variância γ_0

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \ldots + \phi_p \rho_{j-p} \quad (4)$$

$$\Phi(B)\rho_i = 0 \quad (5)$$

Cálculo de Diferenças Finitas (Hamilton): $\rho_j = a_1 G_1^j + \ldots + a_p G_p^j$, para as raízes G_i^{-1} de $\Phi(B) = 0$, sendo que como $|G_i| < 1$, podemos ter:

- G_i real e $a_i G_i^j$ cai geometricamente;
- par de raízes complexas conjugadas com termo $Ad^j \sin(2\pi fj + \psi)$ senóide amortecida

Então, o padrão da FAC para AR(p) é o decaimento mas pode oscilar.

FAC AR(p)

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= Cov(\phi_1 Z_{t-1} + \ldots + \phi_j Z_{t-j} + a_t, Z_t) = \phi_1\gamma_1 + \ldots + \phi_p\gamma_p + \sigma_a^2 \\
1 &= \phi_1\rho_1 + \ldots + \phi_p\rho_p + \frac{\sigma_a^2}{\gamma_0} \\
\gamma_0 &= \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \ldots - \phi_p\rho_p}
\end{aligned}
$$

Se calculo a correlação em (5) para $j = 1, \ldots, p$, temos as **Equações de Yule-Walker**:

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2\rho_1 \ldots + \phi_p\rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1\rho_1 + \phi_2 \ldots + \phi_p\rho_{p-2} \\
\rho_p &= \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} \ldots + \phi_p
\end{aligned}
$$

FACP AR(p)

Para modelo AR(k), $k = 1, 2, \ldots$, tenho

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \ldots + \phi_{kk}\rho_{j-k}, j = 1, \ldots, k$$

A FACP(k) é o ϕ_{kk} do AR(k) (como correlação parcial).

Se o processo segue AR(p), $FACP(k) = 0, k > p$ e assim encontro p.

Exercícios

- Verificar se o processo AR(2) $Z_t = Z_{t-1} - 0,2Z_{t-2} + a_t$, $a_t \sim RB(0, \sigma_a^2)$, é estacionário.
- Para modelo AR(3), obter estimadores de ϕ_i usando método dos Momentos.
- Encontrar as raízes do polinômio característico para AR(2) e verifique que as condições de estacionariedade equivalem a $\phi_2 + \phi_1 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$ e $|\phi_2| < 1$.
- Espectro para modelo AR(1)

MA(q)

$$
\begin{aligned}
Z_t &= \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q} \\
Z_t - \mu &= \Theta(B) a_t
\end{aligned}
$$

O processo MA(q) é sempre **estacionário** e só é **invertível** se as raízes de $\Theta(B) = 0$ estão fora do círculo unitário.
Encontrem a esperança, variância e covariância do MA(1). É estacionário? É invertível?

FAC MA(q)

$$\gamma_0 = \sigma_a^2(1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_j &= Cov(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_j a_{t-j} - \cdots - \theta_q a_{t-q}, \\
&\quad a_{t-j} - \theta_1 a_{t-j-1} - \ldots - \theta_q a_{t-j-q}) \\
&= \begin{cases} \sigma_a^2(-\theta_j + \theta_{j+1}\theta_1 + \ldots + \theta_q\theta_{q-j}), & |j| = 1, \ldots, q \\ 0, & |j| > q \end{cases}
\end{aligned}$$

Identificar q do MA(q)
Espectro

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi}|1 - \theta_1 e^{-i\lambda} - \ldots - \theta_q e^{-i\lambda}|^2, \pi \leq \lambda \leq \pi$$

exercício: MA(1)

ARMA(p,q)

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_t &= \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots \theta_q a_{t-q} \\
(1 - \phi_1 B \ldots - \phi_p B^p)\tilde{Z}_t &= (1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q) a_t \\
\Phi(B)\tilde{Z}_t &= \Theta(B) a_t
\end{aligned}$$

com $a_t \sim RB$

- Estacionário: se as raízes de $\Phi(B) = 0$ estiverem fora do círculo unitário
- Invertível: se as raízes de $\Theta(B) = 0$ estiverem fora
- FAC e FACP parece cair para zero e deve propor valores (p,q) até ter resíduo como RB (pode usar AIC, BIC)

Exercícios ARMA(p,q)

- SS(2006): ARMA(2,2):
  $(1 - 0,4B - 0,45B^2)x_t = (1 + B + 0,25B^2)a_t$
  Estacionário? Invertível? Pode ser reduzido a ARMA(1,1).
- MT(2006): $X_t \sim ARMA(p_x, q_x)$ e $Y_t \sim ARMA(p_y, q_y)$, X_t e Y_t são independentes e $Z_t = X_t + Y_t$. Verifique que $Z_t \sim ARMA(p, q)$ com $p = p_x + p_y$ e $q \leq max(p_x + q_y, q_x + p_y)$
- SS(2006) Invertível MA

Modelos para Processos não estacionários

$X_t = \mu_t + e_t$, em que e_t é estacionário
ex: $\mu_t = tendencia(t) + sazon(t) + tend2(t)$

- se $e_t \sim RB$, propomos modelo de regressão usual.
- se sobra autocorrelação, podemos ter $e_t \sim ARMA(p, q)$

Se X_t se comporta como passeio aleatório (exemplo: preços de ações), podemos calcular a diferença
$Y_t = \Delta X_t = (1 - B)X_t = X_t - X_{t-1}$

- se Y_t é estacionário, dizemos que X_t é I(1).
- se ajustamos $Y_t \sim ARMA(p, q)$, dizemos que $X_t \sim ARIMA(p, d, q)$ com $d = 1$.

Modelos ARIMA(p,d,q)

$$\begin{aligned} \Phi(B)\Delta^d X_t &= \Theta(B)a_t, a_t \sim RB \\ (1-\phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p)(1-B)^d X_t &= (1-\theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q)a_t \end{aligned}$$

$SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_{12}$:

$$\phi(B)\Phi(B^{12})(1-B)^d(1-B^{12})^D X_t = \theta(B)\Theta(B^{12})a_t$$

- Estimação por Máxima Verossimilhança Condicional assumindo por ex. $a_t \sim N(0,\sigma_a^2)$ indep. Variância assintótica usando matriz info. de Fisher.
- ARMA como caso particular do modelo espaço de estados. Estimação no R usando Arima da library(forecast).
- Estimação Bayesiana incluindo por exemplo para AR(1) a restrição de estacionariedade
- Análise de resíduos e só depois testes e previsão

Modelos Harmônicos

$$
\begin{aligned}
Z_t &= \mu + R\cos(\omega t + \phi) + e_t, \\
&= \mu + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + e_t
\end{aligned}
$$

Verifique que esses modelos são equivalentes ($\cos(a+b)$)
Por exemplo, para $\omega = \frac{2\pi t}{12}$, periodo de 12 meses.
Para ω conhecido, usar mínimos quadrados:

$$
\mathbf{Z} = \mathbf{W}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}, \quad \hat{\theta} = (\mathbf{W}^T\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{W}^T\mathbf{Z})
$$

e pela ortogonalidade para $\omega = 2\pi k/N, k = 1, \ldots, [N/2]$

$$
\mathbf{W}^T\mathbf{W} = \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N/2 & 0 \\ 0 & 0 & N/2 \end{pmatrix}
$$

Periodograma

Referências

All Time series analysis

- Morettin e Toloi
- Shumway and Stoffer
- Wei