Processos Estocásticos

Airlane Pereira Alencar

11 de Março de 2019

Índice

Def 1:

Seja T um conjunto arbitrário. Um **processo estocástico** é uma família $Z = \{Z(t), t \in T\}$ em que $Z(t)$ é variável aleatória.

Exemplo

$T = \mathbb{Z}$ e $Z = \{Z_1, Z_2, \ldots\}$

Def 1:

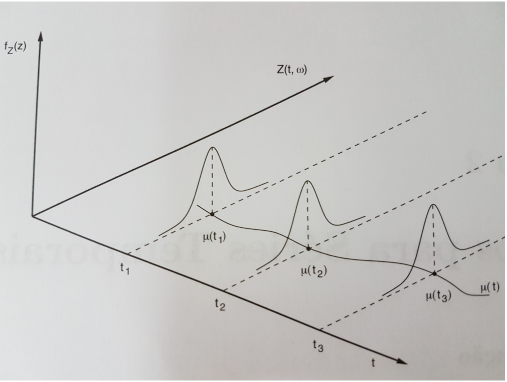
Seja T um conjunto arbitrário. Um **processo estocástico** é uma família $Z = \{Z(t), t \in T\}$ em que $Z(t)$ é variável aleatória.

Exemplo

$T = \mathbb{Z}$ e $Z = \{Z_1, Z_2, \ldots\}$

Família de variáveis aleatórias

Figura 1: Cada variável $Z(t)$ é definida em (ω, A, P) - Morettin e Toloi



Para cada $\omega \in \Omega$ (espaço amostral) fixado, temos uma **série temporal**.

Uma série temporal é uma particular realização do processo estocástico.

Podemos entender um processo estocástico como uma família de trajetórias ao longo do tempo e observamos uma delas.

Em geral, vamos considerar um conjunto discreto de tempos: $t_1, t_2, \ldots$

Definições: Caracterização do processo

Def 2:

A função distribuição n-dimensional do processo estocástico $Z = \{Z(t), t \in T\}$ é definido como

$$F(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n) = P(Z(t_1) \leq z_1, \ldots, Z(t_n) \leq z_n).$$

A partir das funções distribuição finito dimensionais, podemos obter os momentos produtos de ordem $(r_1, \ldots, r_n)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mu(r_1, \ldots, r_n; t_1, \ldots, t_n) &= E(Z_1^{r_1} \ldots Z_n^{r_n}) \\ &= \int \ldots \int z_1^{r_1} \ldots z_n^{r_n} f(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n) dz_1 \ldots \end{aligned}$$

Precisaremos dos momentos: Média, Autocovariância, Variância

$$\begin{aligned} \mu_t &= E(Z_t) \\ &= \int z_t f(z_t) dz_t. \end{aligned}$$

$$Cov(Z_{t_1}, Z_{t_2}) = \gamma(t_1, t_2) = E(Z_{t_1} Z_{t_2}) - E(Z_{t_1}) E(Z_{t_2}), t_1, t_2 \in T.$$

$$Var(Z_t) = \gamma(t, t) = E(Z_t^2) - [E(Z_t)]^2, t \in T.$$

e calcularemos a correlação

$$Corr(Z_{t_1}, Z_{t_2}) = \rho(t_1, t_2) = \frac{Cov(Z_{t_1}, Z_{t_2})}{\sqrt{Var(Z_{t_1}) Var(Z_{t_2})}}, t_1, t_2 \in T.$$

Se todos esses momentos variam ao longo do tempo, como

Estacionariedade

Def 3:

Um processo estocástico $Z = \{Z(t), t \in T\}$ é dito **estritamente estacionário** se todas as distribuições finito dimensionais permanecem as mesmas sob translações no tempo, ou seja,

$$F(z_1, \ldots, z_n; t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau) = F(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n),$$

para $t_1, \ldots, t_n, t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau \in T$.

Por exemplo, $P(Z_1 \leq z_1, Z_2 \leq z_2) = P(Z_{11} \leq z_1, Z_{12} \leq z_2)$.

Assim, todos os momentos são constantes.

Estacionariedade

Def 4:

Um processo estocástico Z é dito **fracamente estacionário** ou **estacionário de segunda ordem** se

- $E(Z_t) = \mu, \forall t \in T$;
- $E(Z_t^2) < \infty, \forall t \in T$;
- $Cov(Z_{t_1}, Z_{t_2}) = g(|t_1 - t_2|)$, ou seja, a covariância é função somente de $|t_1 - t_2|$.
  Notação: $\gamma(k)$, para $k = |t_1 - t_2|$.

Observações

- Z pode ser estritamente estacionário mas só será fracamente estacionário se valer (2).
- Um processo Z tal que valha (2) é dito processo de segunda ordem.

Estacionariedade

Def 4:

Um processo estocástico Z é dito **fracamente estacionário** ou **estacionário de segunda ordem** se

- $E(Z_t) = \mu, \forall t \in T$;
- $E(Z_t^2) < \infty, \forall t \in T$;
- $Cov(Z_{t_1}, Z_{t_2}) = g(|t_1 - t_2|)$, ou seja, a covariância é função somente de $|t_1 - t_2|$.
  Notação: $\gamma(k)$, para $k = |t_1 - t_2|$.

Observações

- Z pode ser estritamente estacionário mas só será fracamente estacionário se valer (2).
- Um processo Z tal que valha (2) é dito processo de segunda ordem.

Exemplos

Exemplo1

$Z = \{Z_t, t \in T\}$ com Z_t variáveis aleatórias com

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= 0, \forall t \in T, \\ Var(Z_t) &= \sigma^2 (< \infty) \forall t \in T, \end{aligned}$$

e Z_t são não correlacionados.
Z é fracamente estacionário? E estritamente estacionário?

Observação:

O processo com média zero, variância constante e não correlacionado é chamado de **Ruído Branco**.

Exemplo 2

Exemplo

$W_t = \frac{1}{3}(Z_{t-1} + Z_t + Z_{t+1})$ com Z_t definido no exemplo anterior.
W_t é fracamente estacionário?
$E(W_t) = 0$

$$\gamma_h = \begin{cases} \frac{3\sigma^2}{9}, & h = 0 \\ \frac{2\sigma^2}{9}, & |h| = 1 \\ \frac{\sigma^2}{9}, & |h| = 2 \\ 0, & |h| > 2 \end{cases}$$

Exemplo 3 - Passeio Aleatório

Passeio Aleatório

Considere $\{e_t, t \geq 1\}$ variáveis aleatórias iid com média μ_e e variância σ_e^2, com $\sigma_e^2 < \infty$.
O processo $X = (X_t)$ é tal que
$X_t = X_{t-1} + e_t$ com $X_0 = 0$. O processo X é fracamente estacionário?

Processo Gaussiano

Def

Um processo $Z = \{Z(t), t \in T\}$ diz-se gaussiano se para qualquer subconjunto $t_1, \ldots, t_n$ de T, as variáveis aleatórias $Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n}$ têm distribuição normal n-variada.

Propriedades da Função de Autocovariância

Seja $X = \{X(t), t \in Z\}$ um processo estacionário real com tempo discreto com função de autocovariância denotada como $\gamma_\tau = Cov(X_t, X_{t+\tau})$.

- $\gamma_0 > 0$;
- $\gamma_{-\tau} = \gamma_\tau$;
- $|\gamma_\tau| \leq \gamma_0$;
- γ_τ é não negativa definida no sentido que $\forall a_j, a_k$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j a_k \gamma_{\tau_j - \tau_k} \geq 0.$$

Propriedades da Função de Autocovariância

Observação

- A função de autocorrelação do processo estocástico $X = \{X(t), t \in Z\}$ é

$$\rho_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\sqrt(\gamma_0)\sqrt(\gamma_0)} = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0}$$

  $\hat{\rho}_\tau$ vai auxiliar a propormos modelos.
- Um exemplo de processo estocástico contínuo (tempo contínuo) é o movimento Browniano (MT p.33);
- A função de autocorrelação de um processo estocástico estacionário decai para 0;

Estimação

$X = \{X(t), t \in Z\}$ processo estacionário

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= \overline{X} \\
E(\overline{X}) &= E\left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} X_t\right) = \mu \\
Var(\overline{X}) &= \frac{1}{N^2} Var\left(\sum_{t=1}^{N} X_t\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{t=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} Cov(X_t, X_s) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} (N - |k|)\,\gamma_k = \frac{1}{N}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)\rho_k \\
&\xrightarrow[N\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

Para estacionário $\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)\rho_k$ é finita pois $\rho_k \to 0$.

Estimação

$X = \{X(t), t \in Z\}$ processo estacionário !

- O estimador da função de autocovariância (γ_j) é

$$\hat{\gamma}_j = c_j = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-j}[(X_t - \bar{X})(X_{t+j} - \bar{X})],\ j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

- Estimador da função de autocorrelação $\rho_j = Corr(X_t, X_{t+j}) = \frac{\gamma_j}{\gamma_0}$ é

$$\hat{\rho}_j = r_j = \frac{\hat{\gamma}_j}{\hat{\gamma}_0},\ j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

- No programa R: acf( ).

Estimação

$X = \{X(t), t \in Z\}$ processo estacionário

Poderíamos considerar outro estimador para a covariância:

$$\hat{\hat{\gamma}}_j = \frac{1}{N-j} \sum_{t=1}^{N-j} [(X_t - \bar{X})(X_{t+j} - \bar{X})], \; j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Esse estimador pode ter um viés um pouco menor, mas esse não é função não negativa definida como é $\hat{\gamma}_j$, logo esse último deve ser utilizado (Wei).

Estimação

$X = \{X(t), t \in Z\}$ processo **Ruído Branco**

Para N grande, $\hat{\rho}_j$ tem distribuição normal com média ρ_j e variância

$$Var(\hat{\rho}_j) = \frac{1}{N}.$$

Assim, podemos usar esse resultado para construir intervalos para verificar para cada lag j, se $\rho_j = 0$ ou não.
Cada intervalo é $0 \mp 1.96\sqrt{1/N}$ e se $\hat{\rho}_j$ está fora do intervalo, então ρ_j é significativo.
Vide Property P1.1 p.30. e Teorema A.7 - Apêndice A de Shumway and Stoffer.

Assimetria e Curtose

$X = \{X(t), t \in Z\}$ processo estacionário

- Coeficiente de Assimetria: $A(X) = E\left(\frac{(X-\mu)^3}{\sigma^3}\right)$
  $\widehat{A} = \frac{1}{(N-1)\hat{\sigma^3}} \sum_{t=1}^{N} (X_t - \bar{X})^3;$
- Curtose de X: $K(X) = E\left(\frac{(X-\mu)^4}{\sigma^4}\right)$
  $\widehat{K} = \frac{1}{(N-1)\hat{\sigma^4}} \sum_{t=1}^{N} (X_t - \bar{X})^4;$
- Se tivermos um processo estacionário gaussiano e N for grande, então
  $\widehat{A} \sim N(0, 6/N)$ e $\widehat{K} \sim N(3, 24/N)$
- Estudar o teste Jarque-Bera apresentado no Apêndice D de Morettin e Toloi (2006).

Espectro

O espectro também caracteriza o processo estacionário, como a FAC. Para $X = \{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$, processo estacionário, suponha que valha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)| d\tau < \infty$$

Então, o **espectro** ou **f. densidade espectral** é a TF da FAC

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\lambda k}, -\pi < \lambda < \pi$$

A transformada inversa é

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) e^{+i\lambda k} d\lambda, k = 0, 1, \ldots$$

Para $\tau = 0$, temos a decomposição da variância

$$\gamma(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda$$

Propriedades da densidade espectral

Teorema 1

O espectro $f(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\lambda k}$, é limitado, não negativo, uniformemente contínuo, par e periódico de período 2π.

- $|f(\lambda)| = \frac{1}{2\pi} |\sum \gamma_k e^{i\lambda k}| \leq \frac{1}{2\pi} \sum |\gamma_k| < \infty$;
- Não negativo, só quando mostrarmos que a esperança do periodograma (não negativo) converge para $f(\lambda)$;
- Uniformemente contínuo

$$
\begin{aligned}
|f(\lambda + \omega) - f(\lambda)| \leq \quad & \tfrac{1}{2\pi} \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |e^{-i(\lambda+\omega)k} - e^{-i\lambda k}||\gamma_k| = \\
& \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |e^{-i\lambda k}||e^{-i\lambda k} - 1||\gamma_k| \xrightarrow[\omega \to 0]{} 0
\end{aligned}
$$

Propriedades do Espectro

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\lambda k}$$

- $\gamma_k = \gamma_{-k}$ (estac) e para $u = -k$:
  $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \gamma_u e^{+iuk} = f(-\lambda)$
- $f(\lambda)$ tem período 2π, pois $e^{-i\lambda k} = cos(\lambda k) - isen(\lambda k)$ tb tem.

Para $t = \mathbb{R}$

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau$$

$f(\lambda)$ tem as mesmas propriedades, exceto que não tem período 2π.

Exemplos

- X_t é RB, então $f(\lambda) = \frac{\gamma_0}{2\pi}$
- $W_t = \frac{1}{3}(Z_{t-1} + Z_t + Z_{t+1})$ com $Z_t \sim RB$

$$\gamma_h = \begin{cases} \frac{3\sigma^2}{9}, & h = 0 \\ \frac{2\sigma^2}{9}, & |h| = 1 \\ \frac{\sigma^2}{9}, & |h| = 2 \\ 0, & |h| > 2 \end{cases}$$

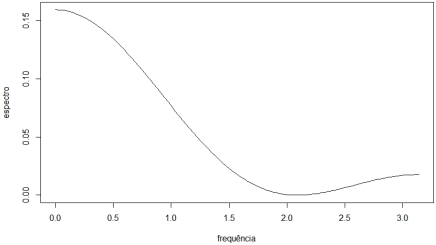
$$e^{-i\lambda k} + e^{i\lambda k} = 2cos(\lambda k)$$

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma_k e^{-i\lambda k} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{3\sigma^2}{9} + \frac{2\sigma^2}{9}2\cos(\lambda) + \frac{\sigma^2}{9}2\cos(\lambda 2)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma^2}{9}[3 + 4\cos(\lambda) + 2\cos(2\lambda)] \end{aligned}$$

Exemplos

- $W_t = \frac{1}{3}(Z_{t-1} + Z_t + Z_{t+1})$ com $Z_t \sim RB$

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma_k e^{-i\lambda k} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{3\sigma^2}{9} + \frac{2\sigma^2}{9}2\cos(\lambda) + \frac{\sigma^2}{9}2\cos(\lambda 2)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma^2}{9}[3 + 4\cos(\lambda) + 2\cos(2\lambda)] \end{aligned}$$



curve((1/9)*(1/(2*pi))*(3+4*cos(x)+2*cos(2*x)), 0, pi)

Correlação entre 2 Processos

De modo análogo ao coeficiente de correlação entre 2 variáveis aleatórias, podemos estudar a correlação entre duas séries (estacionárias).

Def

A função de **covariância cruzada** de $\{X(t), t \in Z\}$ e $\{Y(t), t \in Z\}$ é dada por

$$\gamma_{XY}(s,t) = E[(X_s - E(X_s))(Y_t - E(Y_t))].$$

É importante estudar a relação linear entre séries somente se ambas forem estacionárias.
Leiam sobre correlação espúria.

Função de Correlação Cruzada

Os processos X_t e Y_t estacionários são conjuntamente estacionárias se a covariância cruzada depende apenas de $h = |t - s|$, ou seja, $\gamma_{XY}(s,t) = \gamma(h)$.
Note que $\gamma_{XY}(h)$ não precisa ser simétrica:

$$\begin{aligned} \gamma_{XY}(h) &= E[(X_{t+h} - E(X_{t+h}))(Y_t - E(Y_t))] \\ &= E[(Y_{t-h} - E(Y_{t-h}))(X_t - E(X_t))] = \gamma_{YX}(-h). \end{aligned}$$

A partir da função de covariância cruzada calculamos a função de correlação cruzada.

Função de Correlação Cruzada

Estimadores

$$\hat{\gamma}_{XY}(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-h}(x_{t+h} - \bar{x})(y_t - \bar{y}), \quad \hat{\gamma}_{XY}(-h) = \hat{\gamma}_{YX}(h)$$

$$\hat{\rho}_{XY}(h) = \frac{\hat{\gamma}_{XY}(h)}{\sqrt{\hat{\gamma}_X(0)\hat{\gamma}_Y(0)}}$$

Para N grande e sob independência, $\hat{\rho}_{XY}(h)$ tem dist. normal com média 0 e variância $1/N$, se algum dos processos é ruído branco independente (Teo A.8 - SS).

Referências

All Time series analysis

- Morettin e Toloi
- Shumway and Stoffer
- Wei