Tendência e Sazonalidade

Lane Alencar
2016

Componentes

- Podemos decompor o processo $Z = \{Z(t), t \in T\}$ em:
- $Z_t = T_t + S_t + a_t$ com
- T_t : tendência
- S_t : componente sazonal
- a_t : erro aleatório com $E(a_t)=0$ e $Var(a_t) = \sigma^2$.

Tendência: $Z_t = T_t + a_t$

Métodos para estimar T_t

- Polinômio:
- Suavizar os valores da série para estimar a tendência em cada instante;
- Suavizar a série com ajustes sucessivos de retas de mínimos quadrados (lowess);
- Após estimar T_t podemos obter a série livre de tendência $Y_t = Z_t - \hat{T}_t$.

Polinômio

- Supomos $T_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots + \beta_p t^p$. Ajustando o polinômio pelo método de mínimos quadrados temos que minimizar

$$\sum_{t=1}^{T}\left(Z_t - \beta_0 - \beta_1 t - \beta_2 t^2 - \ldots - \beta_p t^p\right)^2$$

Polinônio + sen + cos

```
# Mortalidade cardiovascular semanal de 1970 a 1979
install.packages("astsa")
library(astsa)
plot(cmort, main="Cardiovascular Mortality", xlab="", ylab="")
tempo = 1:length(cmort)
tempo2 = tempo^2
tempo3 = tempo^3
c = cos(2*pi*tempo/52)
s = sin(2*pi*tempo/52)
fit1 = lm(cmort ~ tempo + tempo2 + tempo3)
fit2 = lm(cmort ~ tempo + tempo2 + tempo3 + c + s)
plot(tempo, cmort)
lines(fit1$fit)
lines(fit2$fit)
```

Médias Móveis

- Médias móveis em torno de Z_t

$$Z_t^* = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} Z_{t+j}.$$

- De modo mais geral:

$$Z_t^* = \sum_{j=-n}^{n} c_j Z_{t+j}.$$

Médias Móveis $Z_t = T_t + a_t$

- Médias móveis em torno de Zt

$$
\begin{aligned}
Z_t^* &= \sum_{j=-n}^{n} c_j (T_{t+j} + a_{t+j}) \\
&= \sum_{j=-n}^{n} c_j T_{t+j} + \sum_{j=-n}^{n} c_j a_{t+j},
\end{aligned}
$$

- vamos denotar

$$a_t^* = \sum_{j=-n}^{n} c_j a_{t+j}.$$

Médias Móveis

Supondo

- $E(a_t)=0$
- Tendência suave:

$$E(Z_t^*) = \sum_{j=-n}^{n} c_j T_{t+j} \approx \sum_{j=-n}^{n} c_j T_t = T_t = E(Z_t).$$

- $Var(a_t^*) = \sigma^2 \sum_{j=-n}^{n} c_j^2$ e para $\sum c_j^2 < 1$, temos $Var(a_t^*) < Var(a_t)$ e consequentemente $Var(Z_t^*) < Var(Z_t)$.

Médias Móveis

- Introduzimos correlação nos erros.
- Supondo $Cov(a_t , a_s) = 0, s \neq t$, obtemos:

$$Cov(a_t^*, a_{t+h}^*) = \begin{cases} \sigma_a^2 \sum_{j=-n+h}^{n} c_j c_{j-h}, h = 0,1,\ldots,2n \\ 0, h = 2n+1,\ldots \end{cases}$$

- Ex4 cap2 Morettin e Toloi

Médias Móveis

- Inferências são limitadas pois o método não é baseado em modelo estatístico.
- Não podemos obter previsões para $t=T+1,\ldots$

- É bastante usado para análise descritiva.
- Podemos utilizar medianas móveis.

Médias Móveis

ma5 = filter(cmort, sides=2, method="convolution", rep(1,5)/5)

ma53 = filter(cmort, sides=2, method="convolution", rep(1,53)/53)

plot(cmort, xlab="week", ylab="mortality", type="l")

lines(ts(ma5, freq=52, start=c(1970,1)), col=2)

lines(ts(ma53,freq=52, start=c(1970,1)), col=4, lwd=2)

Kernel Smoothing

- Média ponderada

$$\hat{f}_t = \sum_{i=1}^{n} w_t(i) x_i$$

$$w_t(i) = \frac{k(\frac{t-i}{b})}{\sum_{j=1}^{n} k(\frac{t-j}{b})}$$

- O estimador $\hat{f}_t$ é chamado estimador Naradaya-Watson (Watson, 1966).
- Por exemplo, o kernel normal é $k(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$
- Quanto maior b, mais suave é $\hat{f}_t$.

Kernel Smoothing

```
plot(cmort, type="p", ylab="mortality")
lines(ksmooth(time(cmort), cmort, "normal",
bandwidth=5/52))
lines(ksmooth(time(cmort), cmort, "normal",
bandwidth=2))
```

Regressão vizinho mais próximo

- Regressão com o método vizinho mais próximo é simplesmente uma regressão linear aplicada aos k vizinhos mais próximos $\{x_{t-k/2}, \ldots, x_t, \ldots, x_{t+k/2}\}$ para predizer x_t.
- Locally weighted regression scatter plot smoothing (Lowess) é um método mais complexo que usa uma certa proporção de vizinhos em uma regressão ponderada robusta (após regressão ponderada usa os resíduos para reponderar.
- Detalhes: Morettin e Tolói (2004) p. 57, Cleveland (1979)

Regressão vizinho mais próximo

- par(mfrow=c(2,1))
- plot(cmort, type="p", ylab="mortality", main="nearest neighbor")
- lines(supsmu(time(cmort), cmort, span=.5))
- lines(supsmu(time(cmort), cmort, span=.01))
- plot(cmort, type="p", ylab="mortality", main="lowess")
- lines(lowess(cmort, f=.02))
- lines(lowess(cmort, f=2/3))

Splines

- Primeiro os tempos $t = 1, \ldots, n$, são separados em k intervalos $[t_0 = 1, t_1], [t_1 + 1, t_2], \ldots, [t_{k-1} + 1, t_k = n]$.
- Os tempos $t_1, \ldots, t_k$ são denominados nós. Em cada intervalo é ajustado o modelo de regressão
- $f_t = T_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$ (em geral de grau 3 = splines cúbicos).
- A suavização usando splines é obtida minimizando

$$\sum_{t=1}^{n}(z_t - f_t)^2 + \lambda \int (f_t'')^2 dt.$$

- A primeira parcela se refere ao ajuste do polınômio e a segunda ao grau de suavidade controlado por λ.

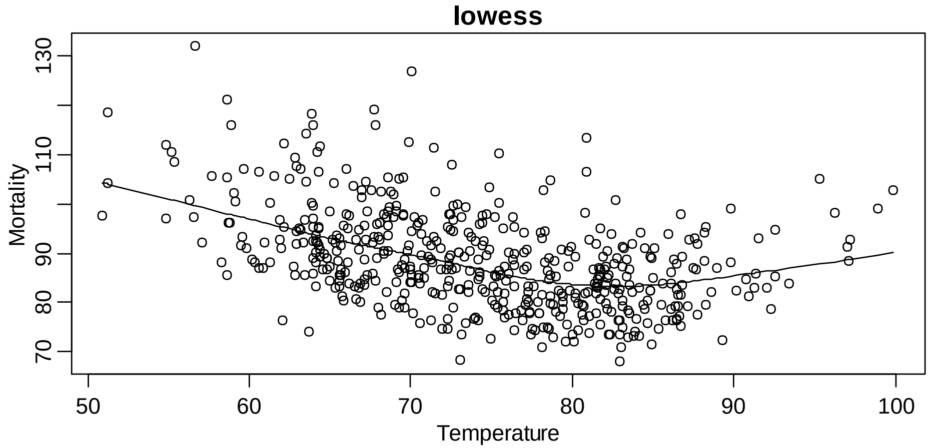
Splines

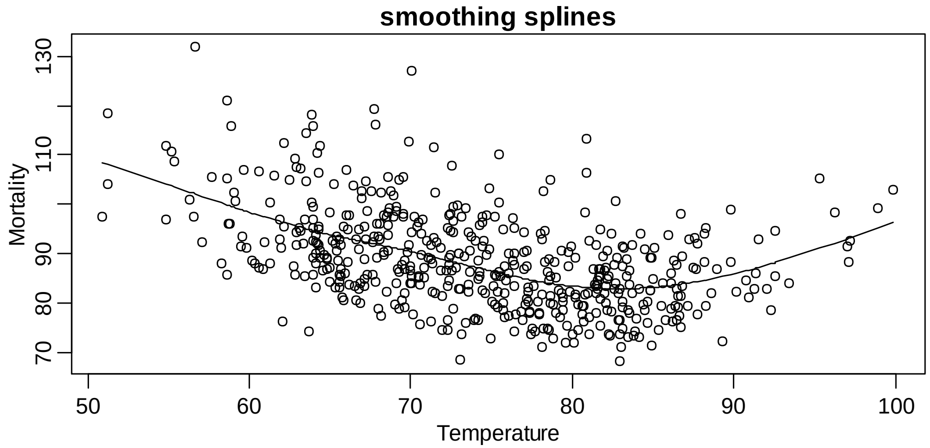
- plot(cmort, type="p", ylab="mortality") lines(smooth.spline(time(cmort), cmort)) lines(smooth.spline(time(cmort), cmort, spar=1))
-

Efeitos não lineares

- Relação entre temperatura e mortalidade
- par(mfrow=c(2,1), mar=c(3,2,1,0)+.5, mgp=c(1.6,.6,0))
- plot(tempr, cmort, main="lowess", xlab="Temperature", ylab="Mortality")
- lines(lowess(tempr,cmort))
- plot(tempr, cmort, main="smoothing splines", xlab="Temperature", ylab="Mortality")
- lines(smooth.spline(tempr, cmort))

Temperatura e mortalidade





Sazonalidade

- $Z_t = T_t + S_t + a_t$, $t = 1, \dots, T$.
- Para o modelo aditivo acima, podemos:

  a. obter estimativas $\hat{S}_t$ de S_t;

  b. calcular série dessazonalizada $Z_t^{SA} = Z_t - \hat{S}_t$.

  Para modelo multiplicativo, podemos ter $Z_t = T_t S_t + a_t$ e $Y_t = \frac{Z_t}{\hat{S}_t}$.

- Sazonalidade determinística

  Por exemplo, para dados mensais:
  $Z_t = \beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j t^j + \sum_{j=1}^{11} \alpha_j D_{jt} + a_t$,
  com D_{jt} variável indicadora que vale 1 se o mês t é igual a j.

Tendência e Sazonalidade

- Primeiro retira-se a tendência e depois a sazonalidade:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= Z_t - \hat{T}_t \\
\hat{T}_t &= \sum_{j=-n}^{n} c_j Z_{t+j}.
\end{aligned}
$$

Para dados mensais (pode estender), temos que para a observação do ano i no mês j, Y_{ij}, temos:
$\bar{Y}_{.j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}$ é a média do mês j.
$\hat{S}_j = \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}$ são estimativas das constantes sazonais para
$\bar{Y} = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} Y_{.j}$.
Calcula-se $Z_t^{SA} = Z_t - \hat{S}_t$.

Suavização Exponencial Simples

- Pode ser escrita como

$$\bar{Z}_t = \alpha Z_t + (1-\alpha)\bar{Z}_{t-1}, \bar{Z}_0 = Z_1, t = 1, \ldots, n.$$

- ou

$$\bar{Z}_t = \alpha \sum_{k=0}^{t-1} (1-\alpha)^k Z_{t-k} + (1-\alpha)^t \bar{Z}_0, \bar{Z}_0 = Z_1, t = 1, \ldots, n.$$

- onde $\bar{Z}_t$ é o valor suavizado e $0 \leq \alpha \leq 1$
- Os pesos são menores para observações mais antigas.

Suavização Exponencial Simples

- Previsão

$\widehat{Z}_t(h) = \bar{\bar{Z}}_t, h = 1, 2, \ldots;$

A atualização da previsão é $\widehat{Z}_t(h) = \alpha Z_t + (1-\alpha)\widehat{Z}_{t-1}(h+1)$, sendo $\widehat{Z}_{t-1}(h+1)$ a previsão para o tempo t quando temos os dados até $t-1$.

$E(\widehat{Z}_t(h)) = \alpha \sum_{k=0}^{t-1}(1-\alpha)^k \mu_{t-k}$.

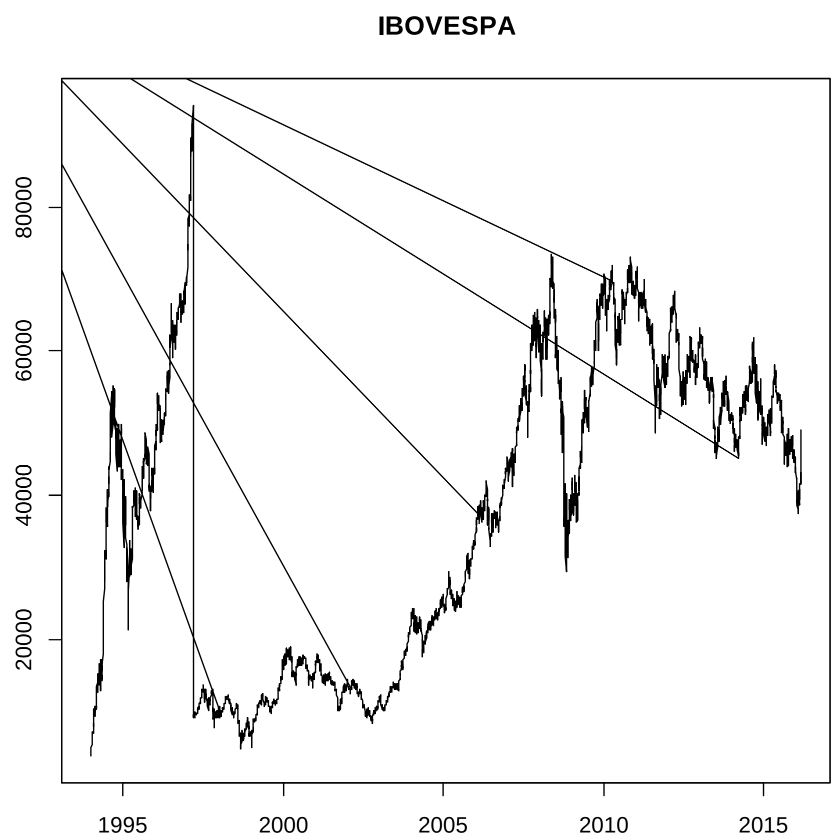
A expressão do $EQM(\widehat{Z}_t(h))$ encontra-se em MT(2006).

Assumindo estacionariedade $Z_t = \mu + a_t$, obtem-se expressões mais simples: $E(\widehat{Z}_t(h)) = \mu$ e $Var(\widehat{Z}_t(h)) = \frac{\alpha\sigma^2[1-(1-\alpha)^{2t}]}{2-\alpha} \rightarrow \frac{\alpha\sigma^2}{2-\alpha}$ e para $t \rightarrow \infty$.

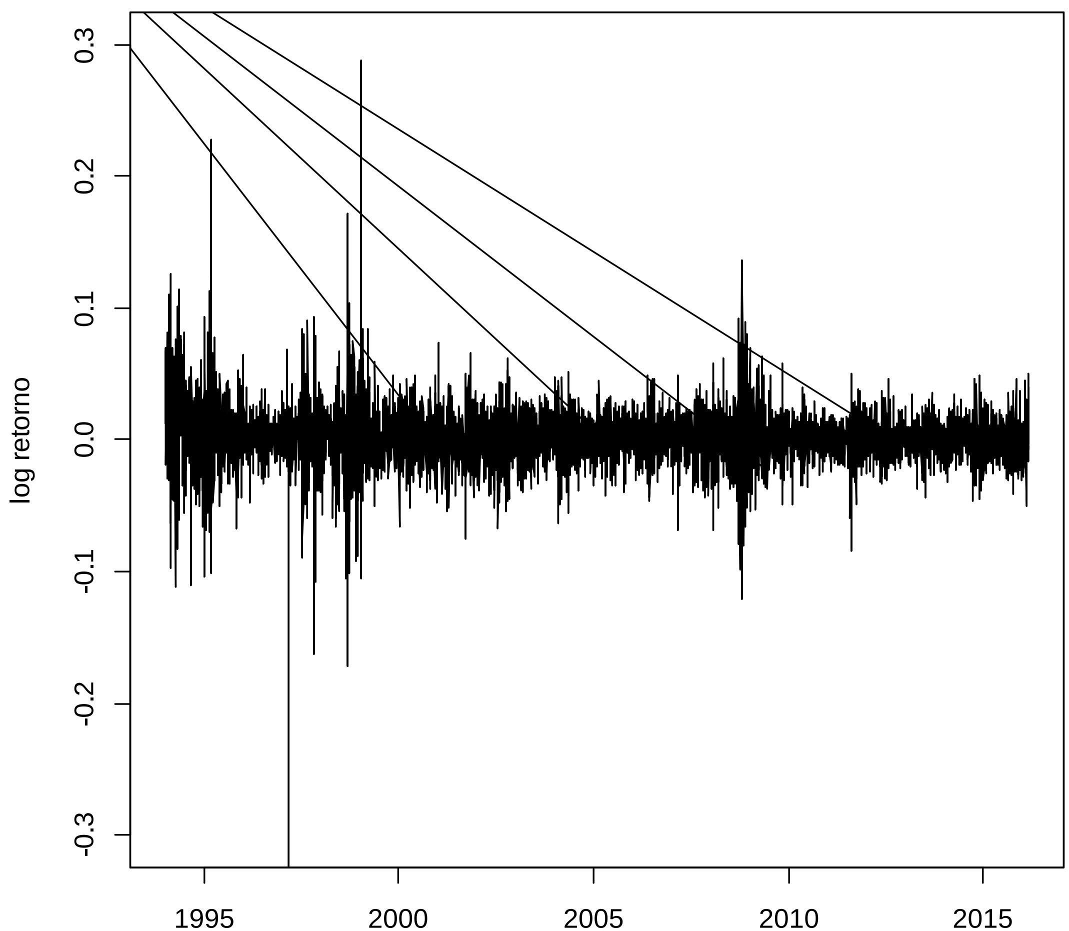
Suavização Exponencial Simples

- Esse método é conhecido como EWMA (Exponential Weighting Moving Averages);
- O método é ótimo se Zt for ARIMA(0,1,1).
- Há vários métodos de escolha de α.
- Esse método é muito utilizado para estimar a volatilidade usando-se os log-retornos ao quadrado.

Ibovespa

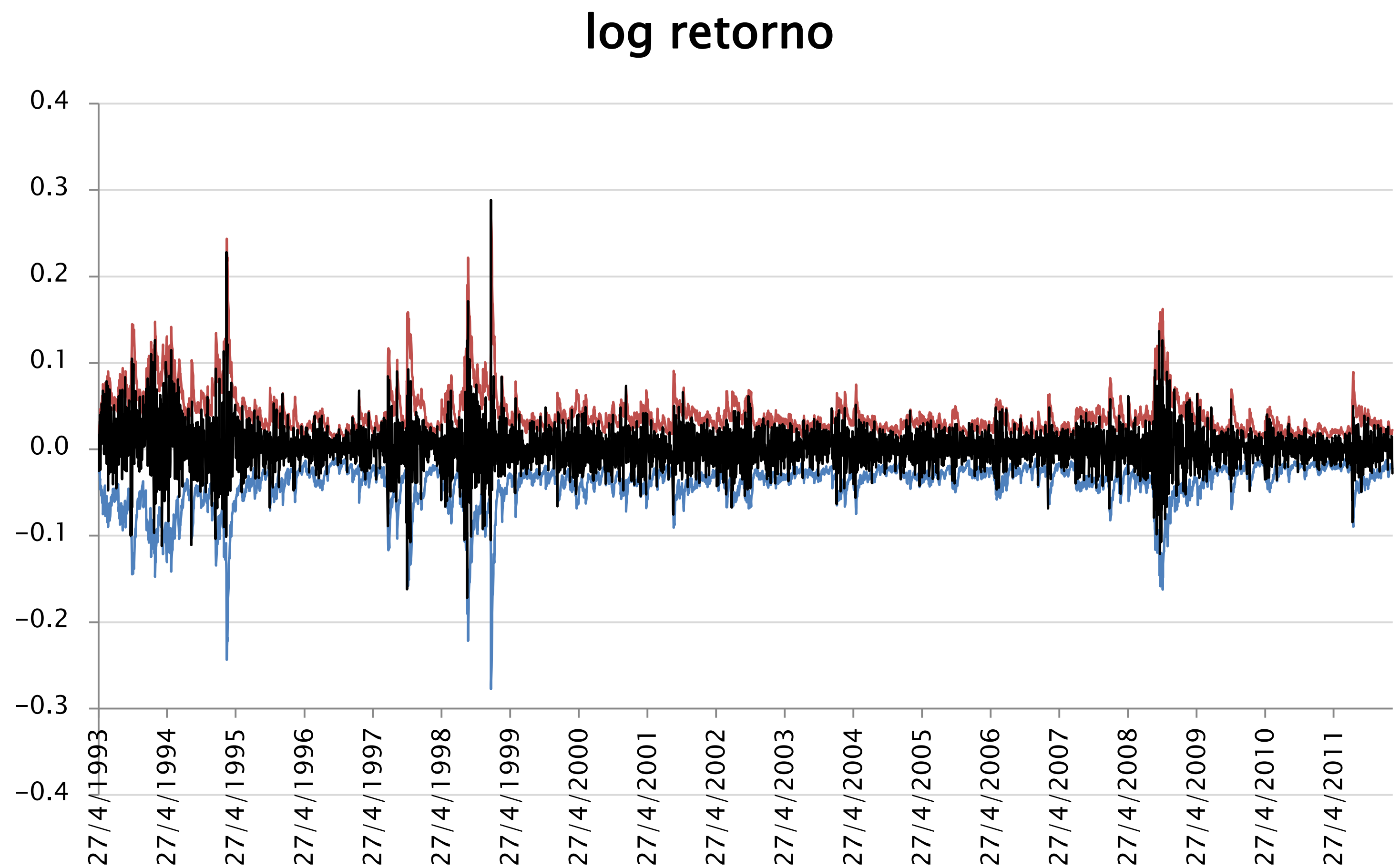


Log retorno



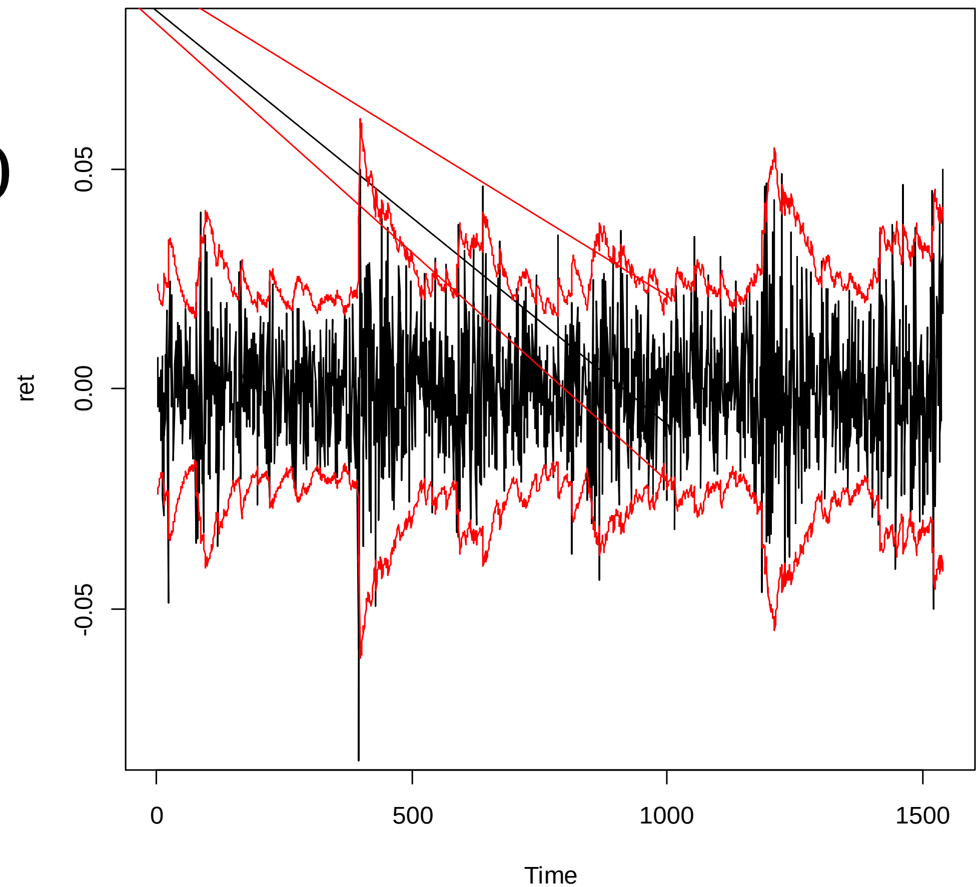
Lane Alencar - 2016

SES de logret^2 para variâncias



Suavização Exponencial Simples – Ibovespa

- library(forecast)
- ? Ses
- Dados desde 2010



Suavização de Holt

- Para $Z_t = \mu + T_t + a_t$
- Os valores de nível e tendência são estimados por

$$\bar{Z}_t = AZ_t + (1 - A)(\bar{Z}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}), 0 < A < 1;$$
$$\hat{T}_t = C(\bar{Z}_t - \bar{Z}_{t-1}) + (1 - C)\hat{T}_{t-1}, 0 < C < 1.$$

- Observações

Previsão: $\hat{Z}_t(h) = \bar{Z}_t + h\hat{T}_t, h > 0.$

A e C são estimados por exemplo de modo a minimizar $\sum a_t^2$.

Fornece previsões ótimas se Z_t for gerado a partir de processo ARIMA(0,2,2).

- fcast <- holt(airmiles)
- plot(fcast)

Holt–Winters

- A série com período s, fator sazonal multiplicativo (F_t) e tendência aditiva é
- $Zt = \mu_t F_t + T_t + a_t$, $t = 1, . . . , T$.
- Equações de suavização para $t = s+1, . . . , T$:

$$\widehat{F}_t = D\frac{Z_t}{\bar{Z}_t} + (1 - D)\widehat{F}_{t-s}, 0 < D < 1.$$

$$\bar{Z}_t = A\frac{Z_t}{\widehat{F}_{t-s}} + (1 - A)(\bar{Z}_{t-1} - \widehat{T}_{t-1}), 0 < A < 1;$$

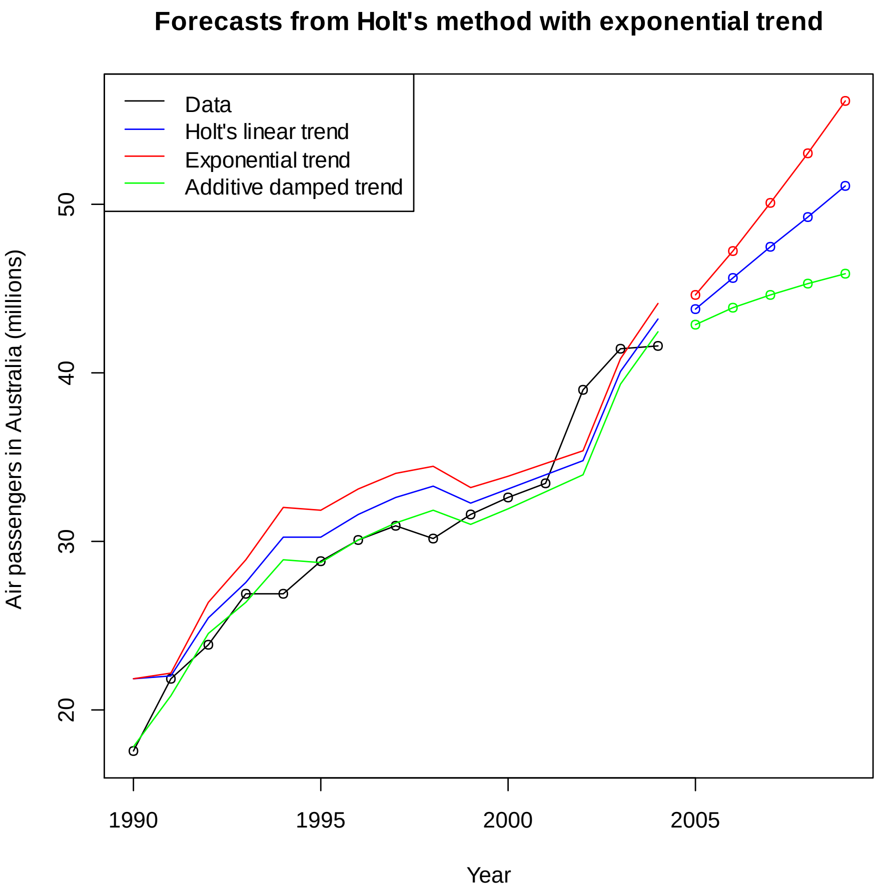
$$\widehat{T}_t = C(\bar{Z}_t - \bar{Z}_{t-1}) + (1 - C)\widehat{T}_{t-1}, 0 < C < 1.$$

- A, C e D estimados por mínimos quadrados.

Holt– Winters – Hyndman

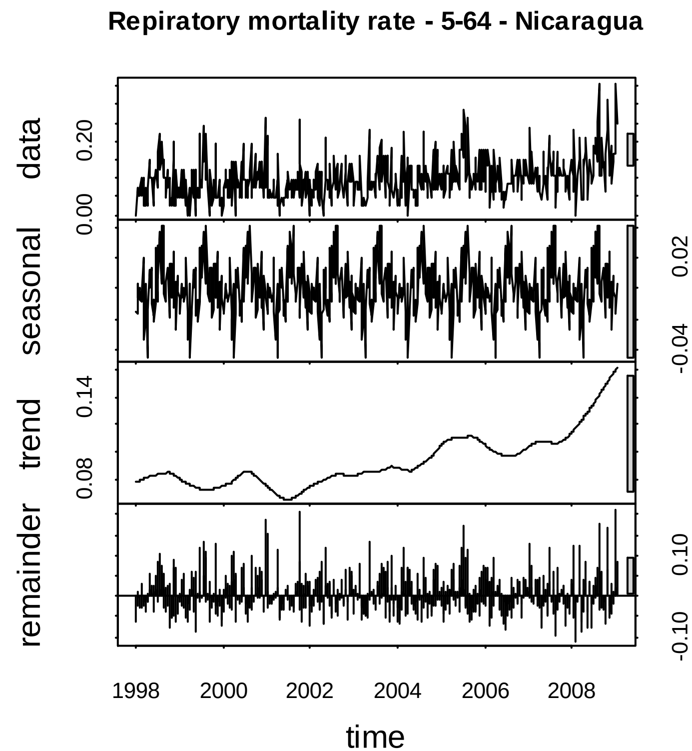
- https://www.otexts.org/fpp/7/2
- library(fpp)
- ```
  air <- window(ausair,start=1990,end=2004)
  fit1 <- holt(air, alpha=0.8, beta=0.2, initial="simple", h=5)
  fit2 <- holt(air, alpha=0.8, beta=0.2, initial="simple", exponential=TRUE, h=5)
  # Results for first model:
  fit1$model$state
  fitted(fit1)
  fit1$mean
  ```
- ```
  fit3 <- holt(air, alpha=0.8, beta=0.2, damped=TRUE, initial="simple", h=5)
  plot(fit2, type="o", ylab="Air passengers in Australia (millions)", xlab="Year",
      fcol="white", plot.conf=FALSE)
  lines(fitted(fit1), col="blue")
  lines(fitted(fit2), col="red")
  lines(fitted(fit3), col="green")
  lines(fit1$mean, col="blue", type="o")
  lines(fit2$mean, col="red", type="o")
  lines(fit3$mean, col="green", type="o")
  legend("topleft", lty=1, col=c("black","blue","red","green"),
    c("Data","Holt's linear trend","Exponential trend","Additive damped trend"))
  ```

Vários métodos



Decomposição Tendência Sazonalidade usando lowess – STL

- Cleveland



- plot(stl(log(co2), s.window="per", t.window=1000))

- Ler artigo Cleveland et al. (1990)

Referências

- Shumway and Stoffer (2006)
- Morettin e Toloi (2006)
- Hyndman and Athanasopoulos (2012). Forecasting: principles and practice
- https://www.otexts.org/fpp
- R. B. Cleveland, W. S. Cleveland, J.E. McRae, and I. Terpenning (1990) STL: A Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess. *Journal of Official Statistics*, **6**, 3–73.
- www.r-project.org