Planejamento e Pesquisa 1

Dois Grupos

Conceitos básicos

- Comparando dois grupos
  - Testes t para duas amostras independentes
  - Testes t para amostras pareadas
  - Suposições e Diagnóstico
- Comparação de mais que dois grupos:
  - ANOVA
  - Decomposição da variabilidade total
  - Testes
  - Suposições e análise de sua validade
  - Comparações múltiplas
  - **Tamanho de amostra**

Exemplo: Cimento Portland

Table 2-1 Tension Bond Strength Data for the Portland Cement Formulation Experiment

j	Modified Mortar y_{1j}	Unmodified Mortar y_{2j}
1	16.85	17.50
2	16.40	17.63
3	17.21	18.25
4	16.35	18.00
5	16.52	17.86
6	17.04	17.75
7	16.96	18.22
8	17.15	17.90
9	16.59	17.96
10	16.57	18.15

- Qual o objetivo?

Dot plot

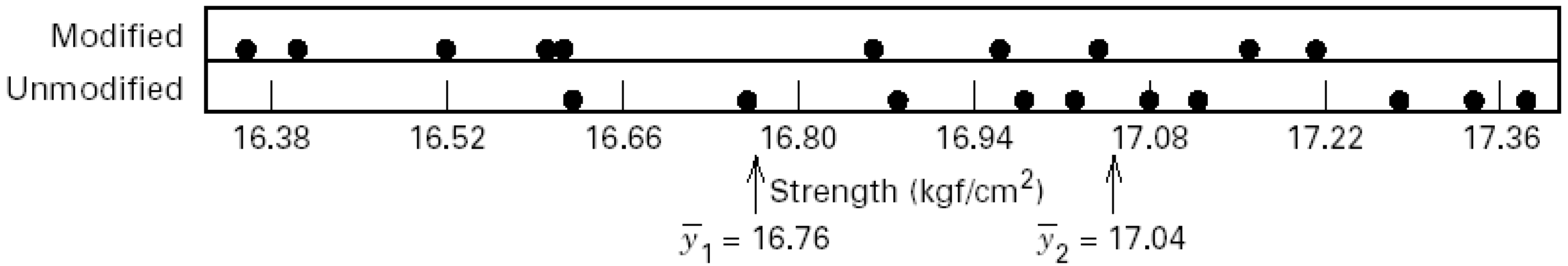


Figure 2-1 Dot diagram for the tension bond strength data in Table 2-1.

Box plot

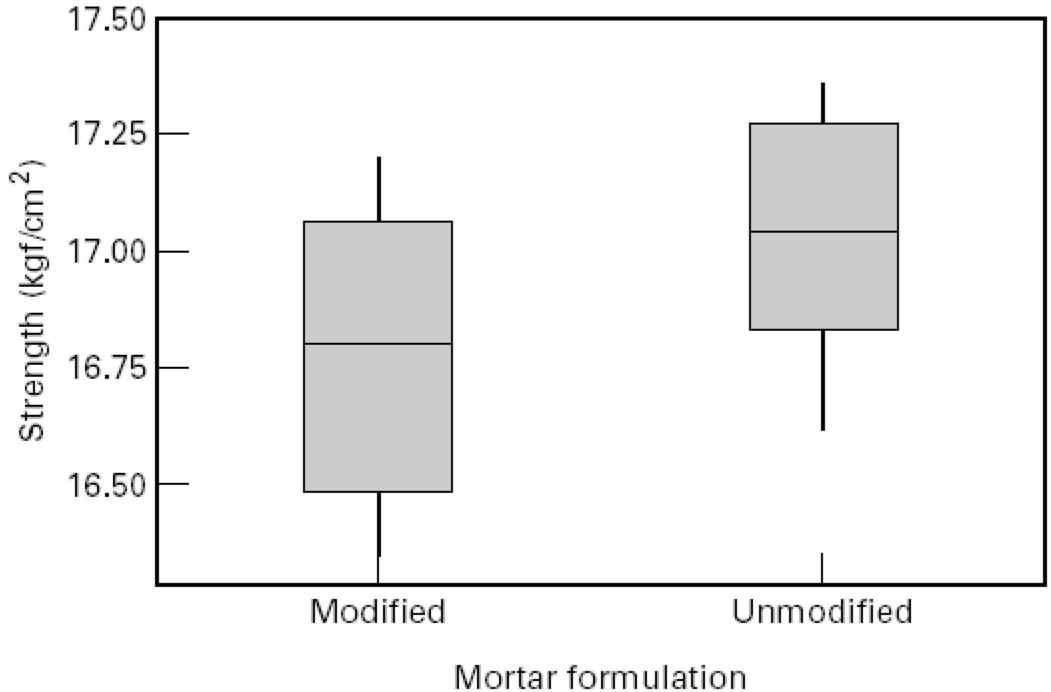


Figure 2-3 Box plots for the portland cement tension bond strength experiment.

Modelo e Interpretação

Testes de hipóteses

- **Ideia do teste de significância**

Teste para duas amostras

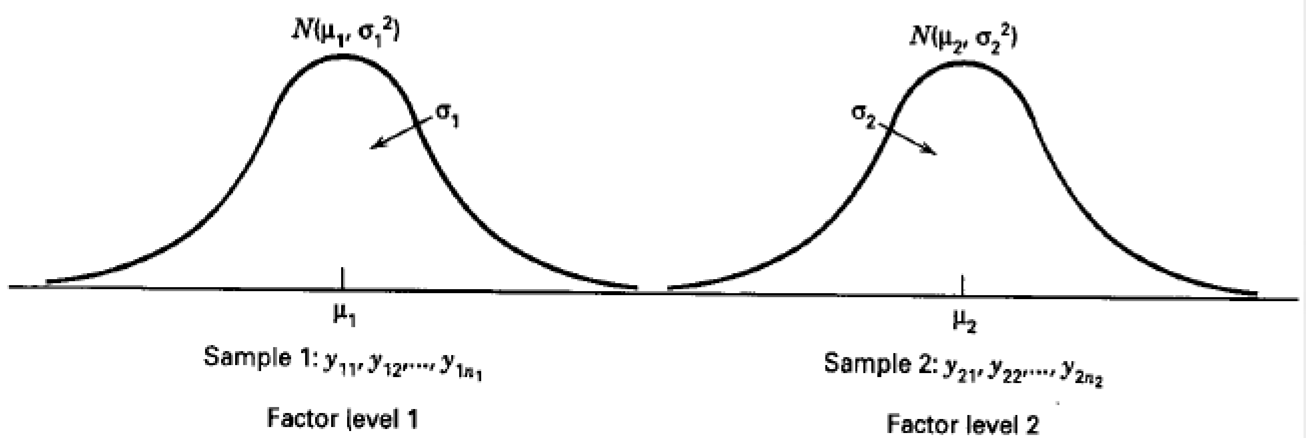


Figure 2-9 The sampling situation for the two-sample t-test.

- **Assumindo distribuição normal**
- Hipóteses:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Estimação dos Parâmetros

- Qual o método de estimação?
- Quais as propriedades desses estimadores?
- Distribuições?

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2$$

Medidas Descritivas

Fórmula 1
"Nova receita"

$$\overline{y}_1 = 16.76$$
$$S_1^2 = 0.100$$
$$S_1 = 0.316$$
$$n_1 = 10$$

Fórmula 2
"Receita original"

$$\overline{y}_1 = 17.04$$
$$S_1^2 = 0.061$$
$$S_1 = 0.248$$
$$n_1 = 10$$

Teste t para 2 amostras

- Quais as hipóteses?
- Diferença entre as médias
- Variabilidade das diferenças
- Teste mais poderoso
- Suposições:
- $y_{1i} \sim N(\mu_1, s_1^2)$, $i=1,\ldots,n_1$
- $y_{2i} \sim N(\mu_2, s_2^2)$, $i=1,\ldots,n_2$

Para variâncias conhecidas

- Estatística se as variâncias forem conhecidas

$$z = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

Para variâncias desconhecidas e diferentes

- Estatística se as variâncias forem desconhecidas

$$t = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} t_\nu$$

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}.$$

- Em 1908, W. S. Gosset derivou a distribuição t de Student.
- Por que obtemos essa distribuição?
- Estudar as distribuições relacionadas com a normal!

Variâncias iguais

- Verificar se é razoável supor que as variâncias são iguais.
- Por que estimar separadamente as variâncias se elas forem iguais?
- Como você estimaria a variância sabendo que as variâncias são iguais?

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Variâncias iguais – teste t

- A partir de

$$z = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{\sigma_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

- Obtemos

$$t = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} t_{n_1+n_2-2}$$

Interprete o valor da estatística

$$t = \frac{(\overline{y}_1 - \overline{y}_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

- Valores de t próximos de zero, ….
- Valores de t distantes de zero,….
- *t* mede uma distância entre as médias expressas em unidades de desvio padrão da diferença entre as médias
- razão sinal-ruído: o quanto é explicado pelo modelo e o quanto é variabilidade residual

Teste de igualdade de médias – variâncias iguais

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{9(0.100)+9(0.061)}{10+10-2} = 0.081$$

$$S_p = 0.284$$

$$t_0 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{16.76-17.04}{0.284\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}} = -2.20$$

- Como concluir o teste de igualdade de médias versus diferença entre as médias?

Teste de igualdade de médias – variâncias iguais

α=5% (o que isso significa?)

- Distribuição t18. valos observado t=-2,2

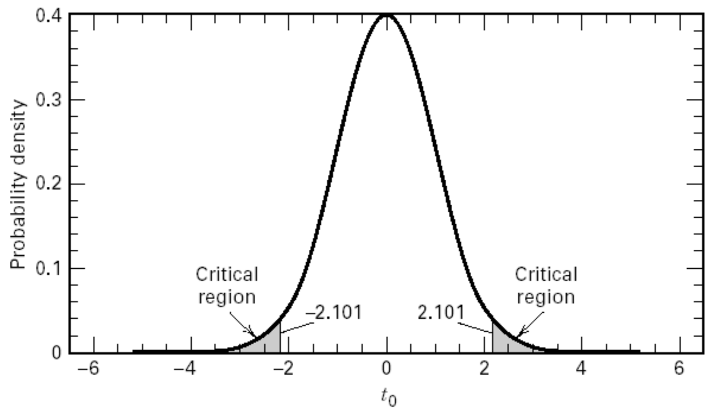


Figure 2-10 The t distribution with 18 degrees of freedom with the critical region $\pm t_{0.025,18} = \pm 2.101$.

Ao nível de significância 5%,
qual a conclusão?
Qual a decisão a ser tomada?

Teste de igualdade de médias – variâncias iguais

- É possível que as médias sejam iguais e |t| seja maior que 2,101, mas isso tem probabilidade pequena (a), então concluo que as médias devem ser diferentes.

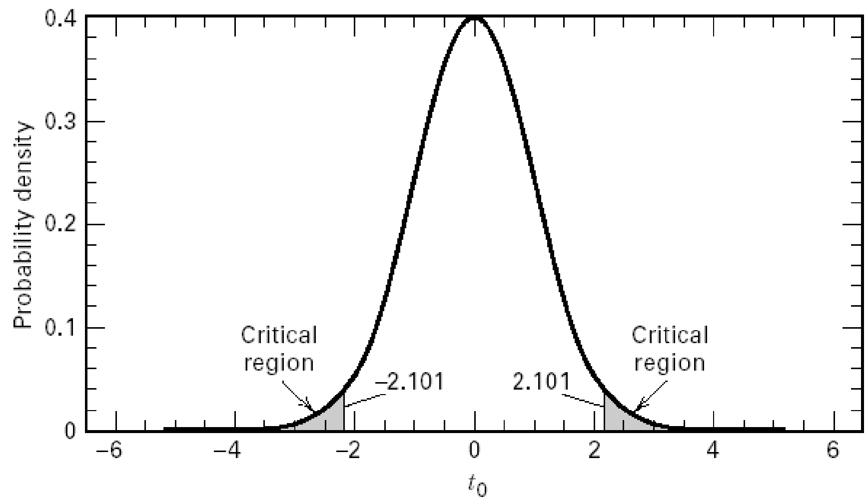


Figure 2-10 The t distribution with 18 degrees of freedom with the critical region $\pm t_{0.025,18} = \pm 2.101$.

Teste de igualdade de médias – variâncias iguais

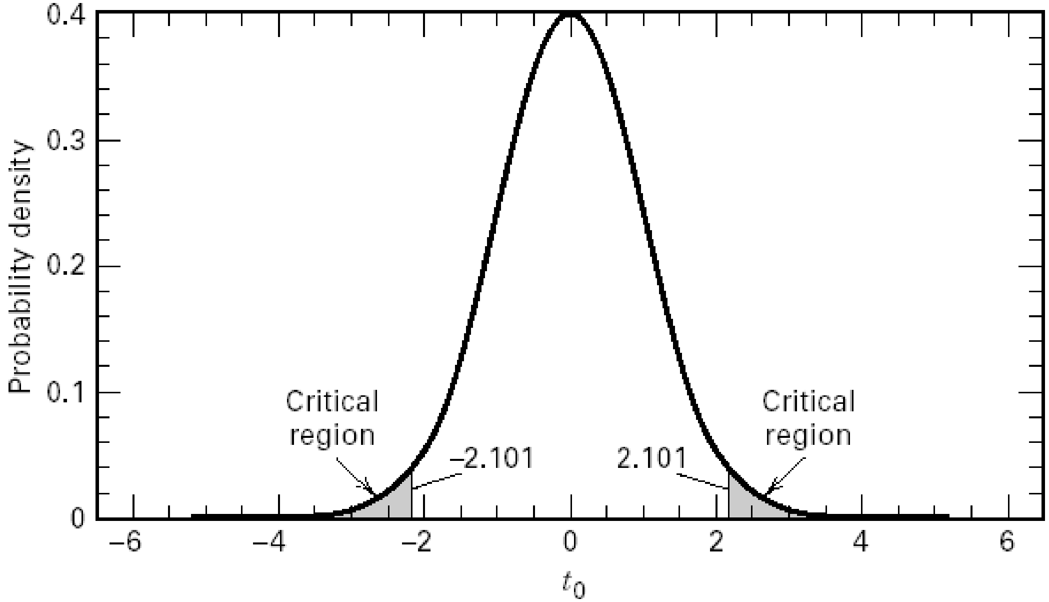
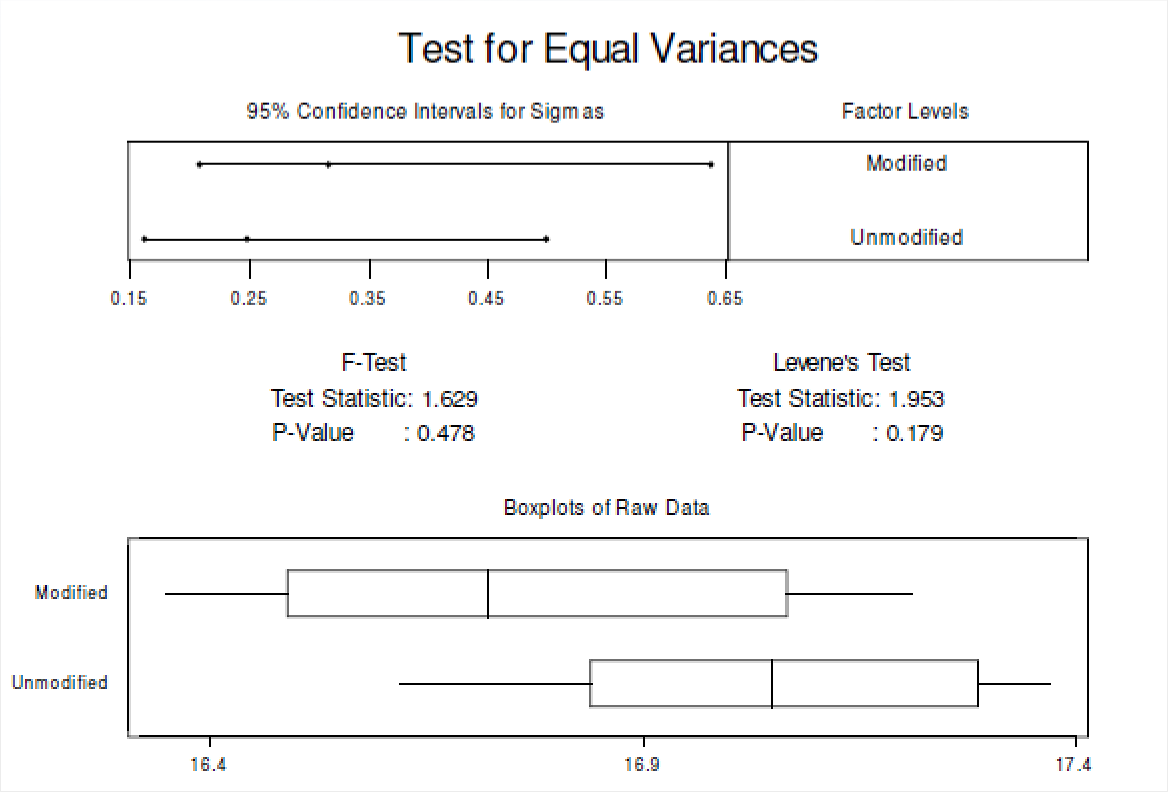


Figure 2-10 The t distribution with 18 degrees of freedom with the critical region $\pm t_{0.025,18} = \pm 2.101$.

- Como calculo o nível descritivo? Qual seu significado?
- No caso p = 0,042.

Teste de igualdade de duas variâncias



Minitab

```
Two-Sample T-Test and CI: Modified; Unmodified
Two-sample T for Modified vs Unmodified
               N      Mean    StDev   SE Mean
Modified       10     16.764  0.316   0.10
Unmodified     10     17.042  0.248   0.078
Difference = mu Modified - mu Unmodified
Estimate for difference: -0.278
95% CI for difference: (-0.545; -0.011)
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = -2.19
P-Value = 0.042 DF = 18
Both use Pooled StDev = 0.284
```

Como seria com variâncias diferentes?

```
Two-Sample T-Test and CI: Modified; Unmodified
Two-sample T for Modified vs Unmodified
             N      Mean   StDev SE Mean
Modified     10     16.764 0.316 0.100
Unmodifi     10     17.042 0.248 0.078
Difference = mu Modified - mu Unmodified
Estimate for difference: -0.278
95% CI for difference: (-0.546; -0.010)
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = -2.19
PValue= 0.043 DF = 17
```

Normalidade

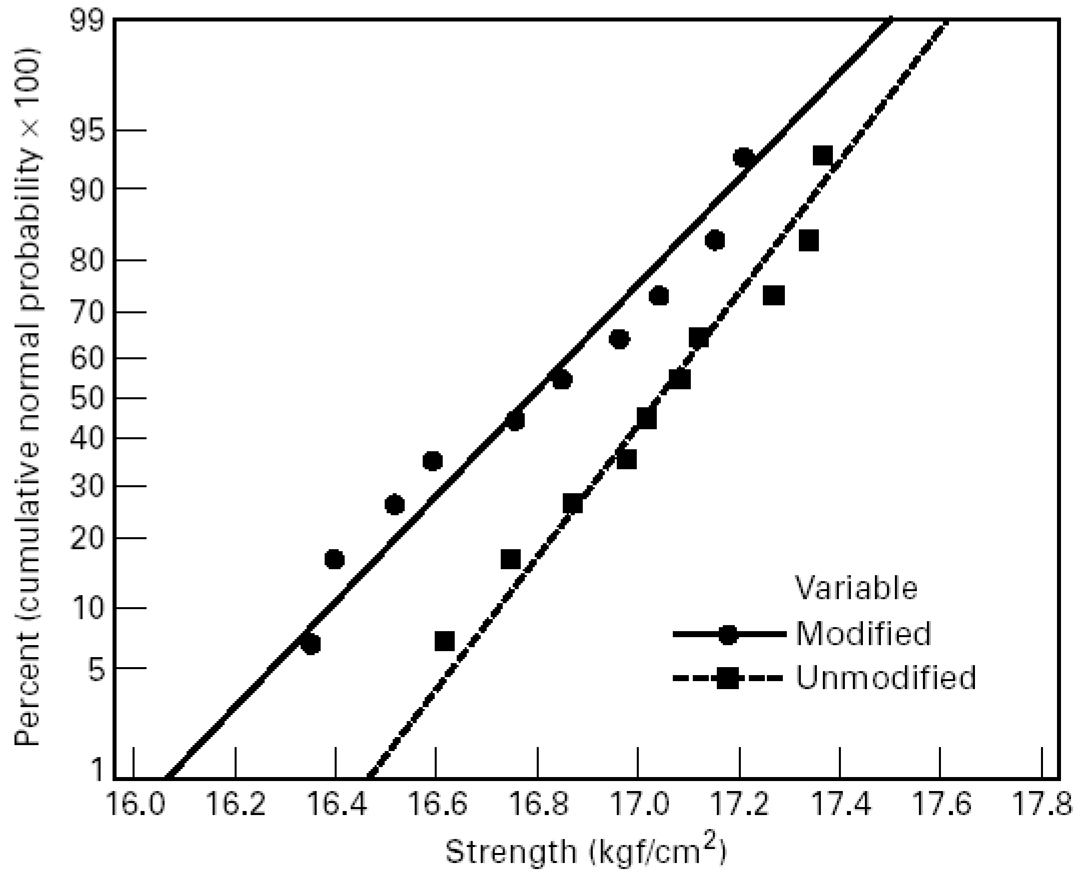


Figure 2-11 Normal probability plots of tension bond strength in the portland cement experiment.

Programas

- Pode utilizar vários programas estatísticos.
- Até o excel, que em geral tem em qualquer empresa, ou o R que é gratuito.

Teste t : unicaudal

- Poderia querer testar
- $H_0: \mu_1=\mu_2$ vs $H_1: \mu_1<\mu_2$
- Como faço o teste?
- A receita nova é mais barata. Quais os possíveis erros nesse teste, se o pesquisador trocar de receita se a nova receita apresentar mesma força média que a tradicional?

Intervalos de confiança

- Intervalo de confiança em geral é construído com uma quantidade pivotal.
- Qual é a quantidade pivotal no nosso caso?
- O intervalo de confiança com coeficiente g% para a diferença de duas médias, para variâncias iguais e desconhecidas tem a forma

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} S_p \sqrt{(1/n_1) + (1/n_2)} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} S_p \sqrt{(1/n_1) + (1/n_2)}$$

- Qual a interpretação do intervalo?
- Como fica com variâncias diferentes desconhecidas e para as conhecidas?

Parametrizações para o modelo de médias

- $Y_{ij} = \mu_i + e_{ij}$, $e_{ij} \sim N(0,\sigma_i^2)$ independentes
- $i=0,1$; $j=1,\ldots,n_i$

- $Y_{ij} = b0+b1\, x_{ij} + e_{ij}$, $e_{ij} \sim N(0,\sigma_i^2)$ independentes
- sendo $x_{ij} = 0$ se $j=0$ e $x_{ij} = 1$ se $j=1$.

E se tiver mais que dois grupos?

- A **análise de variâncias (ANOVA) é** apropriada para esse tipo de experimento.
- A ANOVA foi desenvolvida por Fisher nos anos 20, e aplicada iniciamente em experimentos agrícolas
- Tem diversas aplicações.

Referências

- Montgomery. Design of Experiments.
- Silva, RBV e Ferreira, DF. 2003Alternativas para o teste t com variâncias heterogêneas avaliadas por meio de simulação. http://www.editora.ufla.br/site/_adm/upload/revista/27-1-2003_23.pdf
- Satterthwaite, FE. 1946. An Approximate Distribution of Estimates of Variance Components. Biometrics Bulletin, Vol. 2, No. 6, (Dec., 1946), pp. 110-114