Poder

1 Teste para uma média

Exemplo Altman 1980

Crianças com 5 anos tem ganho médio de 6 cm de altura por ano com desvio padrão de 2 cm. Podemos assumir normalidade do ganho.

Com suplementação de leite um acréscimo de 0,5 cm por ano é relevante.

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 6cm \quad H_1 : \mu > 6cm \\ \alpha &= 5\% \quad Poder = 1 - \beta = 85\% \quad \mu_1 = 6,5cm \\ \alpha &= 5\% = P(rej.H_0; H_0 verd) = P(\overline{X} > c|\mu = 6) = P\left(Z > \frac{c-6}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P(Z > 1,645) \end{aligned}$$

Então $\frac{c-6}{\frac{2}{\sqrt{n}}} = 1,645 \Rightarrow c = 6 + 1,645\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Vai ficar dependendo do n.

Agora, fixamos o poder= 85% quando a média verdadeira é 6,5 cm ($\mu_1 = 6,5$).

$$\begin{aligned} \beta &= 0.85 = P(rej H_0; H_0 falso\ \mu = 6.5) = P(\overline{X} > c|\mu = 6,5) = \\ &= P\left(Z > \frac{c-6,5}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right) = P(Z > -1,036) \end{aligned}$$

Então $\frac{c-6,5}{\frac{2}{\sqrt{n}}} = -1,036 \Rightarrow c = 6,5 - 1,036\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Temos então 2 equações e 2 incógnitas (c , n).

$$\begin{aligned} c = 6,5 - 1,036\frac{2}{\sqrt{n}} &= 6 + 1,645\frac{2}{\sqrt{n}} \\ 6,5 - 6 = 1,645\frac{2}{\sqrt{n}} &+ 1,036\frac{2}{\sqrt{n}} \\ \mu_1 - \mu_0 = z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}} &+ |z_beta|\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \sqrt{n} = \frac{(z_{1-\alpha} + z_{1-\beta})\sigma}{\mu_1 - \mu_0} = \frac{(1,0645 + 1,036)2}{0,5} &= 10,724 \\ n &= 115,004 \end{aligned}$$

Depois chequem, substituindo n=115, temos:

$$c = 6 + 1,645\frac{2}{\sqrt{115}} = 6,30679$$

A expressão geral para teste unicaudal fica

$$n = \left[\frac{(z_{1-\alpha} + z_{1-\beta})\sigma}{\mu_1 - \mu_0} \right]^2,$$

em que $z_{1-\alpha}$ e $z_{1-\beta}$ são respectivamente os quantis $1-\alpha$ e $1-\beta$ da distribuição Normal(0,1), mu_0 é a média sob H_0 e mu_1 é o valor de interesse para a média sob H_1.

2 Teste para proporção

Queremos testar se uma proporção populacional é 30% ou não com nível de significância 5%.

1. Vamos considerar n=100. Construa a região crítica do teste.

$$H_0 \quad : \quad p = 0,3 \qquad H_1 : p \neq 0,3$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= 5\% = P(rej.H_0|H_0 verd) = P(\hat{p} < a, \hat{p} > b | p = 0,3) = \\
&= P\left(Z < \frac{a - 0.3}{\sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{n}}} \cup Z > \frac{b - 0.3}{\sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{n}}} \right) \\
&= P(Z < -1,96 \cup Z > 1,96)
\end{aligned}$$

   Então

$$\begin{aligned}
a &= 0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{100}} = 0,2102 \\
b &= 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{100}} = 0,3898
\end{aligned}$$

   Rejeito H_0 se $\hat{p} < a = 0,2102$ ou $\hat{p} > b = 0,3898$

2. Calcule o poder do teste se p=0,5 e n=100.

   β = P(aceitar $H_0|H_0$ falso p=0,5)

$$\begin{aligned}
Poder &= P(Rej.H_0|H_0 falso\, p = 0,5) = P(\hat{p} < 0,2102 \cup \hat{p} > 0,3898 | p = 0,5) = \\
&= P\left(Z < \frac{0,2102 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5^2}{100}}} \cup Z > \frac{0,3898 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5^2}{100}}} \right) = \\
&= P\left(Z < -5,796 \cup Z > -2,204 \right) = 0,9862
\end{aligned}$$

3. Calcule o poder do teste se p=0,4 e n=100.

$$\begin{aligned}
Poder &= P(Rej.H_0|H_0 falso\, p = 0,4) = P(\hat{p} < 0,2102 \cup \hat{p} > 0,3898 | p = 0,4) = \\
&= P\left(Z < \frac{0,2102 - 0,4}{\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{100}}} \cup Z > \frac{0,3898 - 0,4}{\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{100}}} \right) = \\
&= P\left(Z < -3,8743 \cup Z > -0,2082 \right) = 0,5825
\end{aligned}$$

4. Agora calcule o tamanho da amostra para termos poder de 80% se p=0,4.

$$\begin{aligned}\alpha &= 5\% = P(rej.H_0|H_0 verd) = P(\hat{p} < a, \hat{p} > b|p = 0,3) = \\ &= P\left(Z < \frac{a - 0.3}{\sqrt{\frac{0,3\cdot 0,7}{n}}} \cup Z > \frac{b - 0.3}{\sqrt{\frac{0,3\cdot 0,7}{n}}}\right) \\ &= P(Z < -1,96 \cup Z > 1,96)\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}a &= 0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0.3\cdot 0.7}{n}} \\ b &= 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0.3\cdot 0.7}{n}}\end{aligned}$$

Rejeito H_0 se $\hat{p} < a =$ ou $\hat{p} > b$. Agora calculo o poder usando essa região crítica, que depende de n.

$$\begin{aligned}Poder &= P(Rej.H_0|H_0 falso\, p = 0,4) = P(\hat{p} < a \cup \hat{p} > b|p = 0,4) = \\ &= P\left(Z < \frac{a - 0,4}{\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{n}}} \cup Z > \frac{b - 0,4}{\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{n}}}\right) = 0,8\end{aligned}$$

$$P\left(Z < \frac{a - 0,4}{\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{n}}}\right) \approx 0$$

$$P\left(Z > \frac{b - 0,4}{\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{n}}}\right) = 0,8 = P(Z > -0,8416) \Rightarrow$$

$$\frac{b - 0,4}{\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{n}}} = -0,8416 \Rightarrow b = 0,4 - 0,8416\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{n}}$$

Substituindo b na expressão da região crítica, temos:

$$\begin{aligned}b &= 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0.3\cdot 0.7}{n}} = 0,4 - 0,8416\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{n}} \\ 0,4 - 0,3 &= \frac{1,96\sqrt{0,3\cdot 0,7}}{\sqrt{n}} + \frac{0,8416\sqrt{0,4\cdot 0,6}}{\sqrt{n}} \\ \sqrt{n} &= \frac{1,96\sqrt{0,3\cdot 0,7} + 0,8416\sqrt{0,4\cdot 0,6}}{0,4 - 0,3} = 13,1048 \\ n &= 171,7366\end{aligned}$$

Obtemos n=172. Podemos checar calculando os valores a e b da região crítica e o poder.

$$a = 0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0.3\cdot 0.7}{172}} = 0,3 - 0,0685 = 0,2315$$

$$
\begin{aligned}
b &= 0,3+1,96\sqrt{\frac{0.3\cdot 0.7}{172}} = 0,3+0,0685 = 0,3685 \\
Poder &= P(\hat{p} < 0,2315 \cup \hat{p} > 0,3685 \; p = 0,4) = \\
&= P\left(Z < \frac{0,2315-0,4}{\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{172}}} \cup Z > \frac{0,3685-0,4}{\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{172}}}\right) \\
&= P(Z < -4,5105 \cup Z > -0,8416) = 0,8
\end{aligned}
$$

A fórmula geral para teste bicaudal é

$$
n = \left[\frac{z_{1-\alpha/2}\sqrt{p_0\cdot(1-p_0)} + z_{1-\beta}\sqrt{p_1\cdot(1-p_1)}}{p_1-p_0}\right]^2
$$

Para teste unicaudal, só troca $z_{\alpha/2}$ por z_α, obtendo

$$
n = \left[\frac{z_{1-\alpha}\sqrt{p_0\cdot(1-p_0)} + z_{1-\beta}\sqrt{p_1\cdot(1-p_1)}}{p_1-p_0}\right]^2
$$

Nessas fórmulas, temos $z_{1-\alpha/2}$, $z_{1-\alpha}$ e $z_{1-\beta}$ são respectivamente os quantis $1-\alpha/2$, $1-\alpha$ e $1-\beta$ da distribuição Normal(0,1), p_0 é a proporção sob H_0 e p_1 é o valor escolhido para a proporção sob H_1 para o cálculo do poder.