MÚSICA, COMPUTADORES E FRACTAIS*

Fabio Kon
Bacharelando em Música (Instrumento - Percussão) no
Instituto de Artes da UNESP
e Mestrando em Ciência da Computação no
Instituto de Matemática e Estatística da USP
Correio Eletrônico : kon@ime.usp.br

Orientador:
Prof. Dr. John E. Boudler
Instituto de Artes - UNESP

1 INTRODUÇÃO

As duas últimas décadas presenciaram o surgimento de uma nova maneira de encarar alguns fenômenos naturais cujo comportamento era considerado imprevisível : a teoria do CAOS [1]. Uma das principais ferramentas desta teoria são os FRACTAIS, objetos matemáticos definidos e estudados em profundidade pelo matemático, pesquisador da IBM, Benoit Mandelbrot [2].

1.1 O Caos e os Fractais

A geometria dos fractais é uma ferramenta eficiente para modelar fenômenos caóticos observados na natureza. Através dos fractais é possível determinar com precisão a forma de objetos considerados indescritíveis pela geometria clássica. Você já pensou em como seria difícil, para não dizer impossível, representar realisticamente um conjunto de nuvens utilizando retas, triângulos, círculos ou qualquer outra forma da geometria clássica ? Michael Barnsley afirma em seu *Fractals Everywhere*, [BARNSLEY 88]:

*Trabalho resultante da pesquisa intitulada *A Utilização de Fractais na Análise e na Composição Musical* financiada pela FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) - Processo 91/2734-0. Este trabalho foi classificado em primeiro lugar na área de Ciências Humanas no IV Congresso de Iniciação Científica da UNESP realizado em agosto de 1992.

[1]Ver [GLEICK 90].

[2]Ver [MANDELBROT 83].

"A geometria fractal fará você enxergar tudo de uma maneira diferente. (...) Você corre o risco de perder a sua visão infantil de nuvens, florestas, galáxias, folhas, penas, flores, rochas, montanhas, torrentes de água, gramados, tijolos e muito mais. Nunca mais a sua interpretação destas coisas será a mesma."

Uma característica importante dos fractais é que fórmulas matemáticas simples podem gerar estruturas complexas com comportamento caótico, não periódico. Sobre isto, diz Barnsley no mesmo livro :

"(...) Um conjunto fractal consiste geralmente de infinitos pontos cuja organização é tão complicada que não é possível descrever o conjunto especificando diretamente cada ponto contido nele. Ao invés disso, o conjunto deve ser definido pelas 'relaçõs entre as partes'. É como descrever o sistema solar enunciando a lei da gravidade e as condições iniciais. Tudo segue disto. Parece ser sempre melhor descrever as coisas em termos de relações."

1.2 E a música, onde entra ?

Após os primeiros trabalhos de Mandelbrot, cientistas de diversas áreas como, por exemplo, a física, a computação gráfica, a economia[3], têm utilizado os fractais e obtido resultados importantes. Em meados da década de 80, pesquisadores interessados no uso da informática na música começaram a estudar as possibilidades de utilização dos fractais na análise e na composição musical.

A manipulação dos fractais através do computador torna-se bem simples uma vez que a repetição de padrões pré-estabelecidos, o forte dos computadores, é a essência dos fractais. Um fractal tem a peculiaridade de que, ao ampliarmos uma de suas partes, obtemos uma forma semelhante ao fractal inteiro. Esta peculiaridade pode ser observada diversas vezes na música [4]. Além disso, eles têm a característica de produzirem estruturas complexas a partir de pouca informação. Veremos a seguir que podemos produzir uma peça musical extensa baseado numa pequena seqüência de notas musicais. A aplicação da teoria matemática dos fractais à musica tem trazido resultados surpreendentes mas ainda existem muitas possibilidades não exploradas e portanto, muito espaço para pesquisa.

1.3 Definição Matemática dos Fractais

Um fractal é um conjunto de pontos do espaço com uma certa característica. Antes de enunciar a definição precisamos introduzir dois conceitos.

O conceito de *dimensão topológica* é algo muito antigo e vem ao encontro da nossa noção intuitiva de dimensão. Desde o século VI a.C. pensadores como Pitágoras (580 a.C. - 500 a.C.), Platão (428 a.C. - 348 a.C.), Euclides (300 a.C. aproximadamente) e Riemann (1826 - 1866) trabalharam tentando definir formalmente o conceito de dimensão.

Não cabe aqui uma definição formal da dimensão topológica de um conjunto, basta termos em mente que um ponto, ou um conjunto finito de pontos tem dimensão (topológica)

[3] Ver [CHAVES 89], [DEMKO et al 85] e [MANDELBROT 83].

[4] Considerar por exemplo a forma de sonata que nada mais é do que uma cadência ampliada.

zero, uma linha possui dimensão um, uma superficie tem dimensão dois, um sólido possui dimensão três e assim por diante. Se a nossa imaginação permitir podemos continuar esta viagem por conjuntos de dimensão quatro, cinco, etc.

Mas existem outras maneiras, distintas da dimensão topológica, de se medir a dimensão de um conjunto. Em 1919, Felix Hausdorff definiu a medida de Hausdorff que foi utilizada por Besicovitch na elaboração do que hoje é chamada *dimensão de Hausdorff-Besicovitch*. A definição formal desta nova dimensão foge ao escopo deste trabalho e pode ser encontrada em [MANDELBROT 83].

A dimensão de Hausdorff-Besicovitch de um conjunto "normal" (como um triângulo ou um cilindro, por exemplo) é igual à sua dimensão topológica. Mas existem certos "monstrinhos" para os quais a dimensão de Hausdorff-Besicovitch é maior que a sua dimensão topológica. Muitas vezes a dimensão de Hausdorff-Besicovitch de um conjunto é um número fracionário. Este fato levou Mandelbrot a escolher o nome *FRACTAL* para os seus monstrinhos.

1.4 A Aparência dos Fractais

Os fractais podem apresentar uma infinidade de formas diferentes; não existe uma aparência consensual. No entanto, existem duas características muito freqüêntes neste tipo de geometria: a complexidade infinita e a auto-semelhança.

Todo fractal é infinitamente complexo, isto é, nunca conseguiremos representar um fractal completamente, sempre faltarão detalhes. E não adianta ampliar uma imagem fractal para enxergar todos os detalhes pois sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores.

O outro aspecto interessante apresentado por boa parte dos fractais é a auto-semelhança, ou seja, ao olharmos para uma parte de um conjunto fractal, vemos uma forma semelhante ao todo. Em outras palavras, um fractal é formado por pequenos tijolos onde cada tijolo se parece com o próprio fractal e cada tijolo é formado por tijolos de uma menor escala de grandeza, cada um dos quais, semelhantes ao tijolo maior e assim por diante indefinidamente.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

Embora a bibliografia sobre a utilização de fractais na música seja escassa, limitando-se a alguns artigos em revistas estrangeiras, existem vários livros e artigos que tratam da utilização de computadores e de modelos matemáticos na análise e na composição musical e também bastante material sobre os fractais propriamente ditos. Uma profunda leitura de todo este material está sendo feita visando-se construir uma base teórica para a composição de peças musicais.

A linha geral tem sido analisar os algoritmos [5] destinados à criação de conjuntos fractais e aplicá-los à música.

[5] Um algoritmo é uma seqüência de instruções destinadas a realizar uma determinada tarefa. Em geral são executados por um computador eletrônico.

Devido à alta complexidade apresentada pelos objetos fractais, é praticamente impossível manipulá-los sem a ajuda de computadores eletrônicos. Tal ajuda torna-se necessária tanto no momento da composição quanto no da execução de obras musicais. Assim, o processo de composição musical deixa de ser apenas manual e torna-se, pelo menos em parte, automatizado. O primeiro passo para a criação de uma música fractal é o desenvolvimento de programas de computador. Em seguida, o produto gerado por tais programas pode ser, eventualmente, trabalhado de modo tradicional.

Minhas primeiras composições resultantes do presente estudo foram executadas exclusivamente por um computador ligado a um sintetizador. Mais recentemente, incluí um instrumento acústico, a marimba. Estou em processo de composição de peças para vários músicos executando diversos instrumentos de percussão como vibrafone, marimba, xilofone, tímpanos, campanas, tom-tons, pratos, etc. Em todas estas obras o computador ainda atuará como executante em partes impossíveis de serem executadas por um ser humano.

3 RESULTADOS

A seguir, duas técnicas de construção de "fractais musicais". Mas antes é preciso lembrar que verdadeiros fractais, como observamos na seção 1.4, são infinitamente complexos. Assim, é imposssível fazer um desenho de um fractal ou tocar uma música fractal. Uma verdadeira música fractal teria que ter infinitas notas. Portanto o que faremos são aproximações de fractais, o que justifica as aspas na expressão "fractais musicais".

3.1 A Curva Triádica de Koch

Um dos fractais mais simples que se pode conceber é a curva triádica de Koch apresentada pelo matemático Helge von Koch muito antes de qualquer formalização deste novo tipo de geometria. Sua dimensão topológica é 1 pois a curva triádica de Koch não passa de uma linha retorcida como podemos ver na figura 1e. Por outro lado, sua dimensão de Hausdorff-Besicovitch é $\frac{ln4}{ln3}$ que é aproximadamente 1,2618. Logo, temos aqui um fractal.

Podemos construir a curva triádica de Koch da seguinte maneira: começamos com um segmento de reta horizontal. Dividimos este segmento em três partes iguais e substituímos o segmento central por dois novos segmentos, como mostra a figura 1b, e mantemos os demais segmentos inalterados. Em seguida, repetimos a operação para cada um dos quatro segmentos resultantes. O fractal é obtido quando este processo é infinitamente repetido.

A curva triádica de Koch tem várias características interessantes. Por exemplo, esta curva, apesar de estar confinada a uma área finita, possui comprimento infinito. Maiores detalhes sobre curvas de Koch podem ser encontrados em [MANDELBROT 83] a partir da página 42.

Podemos fazer uma analogia ao método de construção de fractais que acabamos de ver. Ao invés de trocarmos um segmento de reta de um determinado tamanho por alguns segmentos de tamanho menor faremos o seguinte: Começamos definindo um pequeno desenho melódico que chamaremos de *construtor*. Iniciamos a construção com uma única nota longa (correspondente ao segmento de reta horizontal que tínhamos no início da construção da curva de Koch). Em seguida, substituímos esta nota pelo construtor que deve ser transposto [6] de modo que ele se inicie na mesma altura que a nota longa inicial. Agora, repetimos a operação, isto é, substituímos cada nota do desenho melódico por uma nova cópia deste mesmo desenho melódico em escala reduzida e transposto de modo que a sua primeira nota coincida com a nota sendo substituída. O desenho melódico em escala reduzida é construído comprimindo os intervalos entre as notas e reduzindo a duração de cada nota. Esta redução nas durações é feita de modo que a soma das durações das notas do construtor em escala reduzida seja igual à duração da nota que estamos substituindo.

Obteríamos um fractal se repetíssemos esta operação infinitas vezes. Mas para a criação musical isso não é necessário pois após algumas iterações deste processo obtemos uma linha melódica tão rápida que se torna impossível de ser assimilada pelo ouvido humano. Na prática tenho utilizado de três a sete iterações.

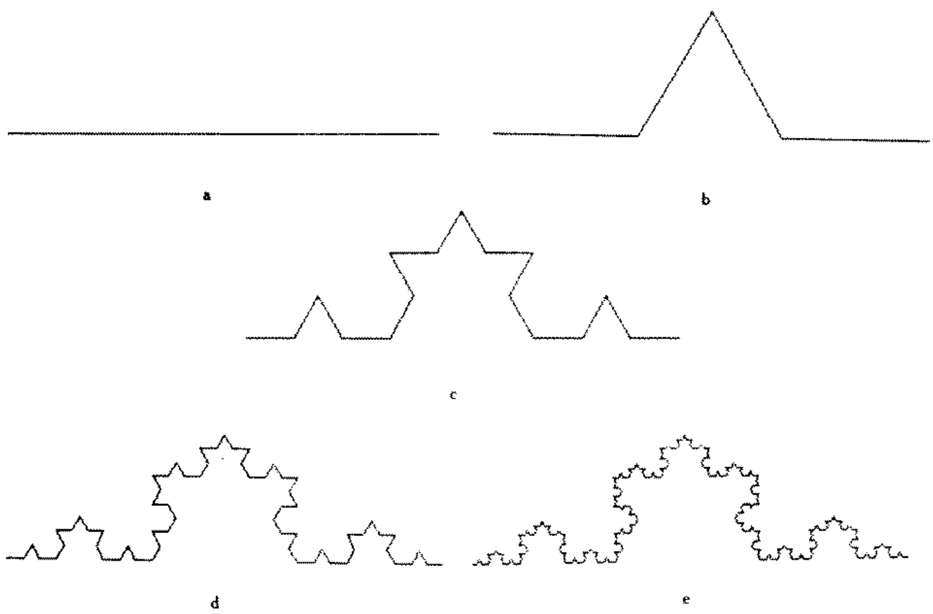

Figura 1: Vários níveis da curva triádica de Koch.

Podemos também obter música polifônica tocando simultaneamente todas as melodias das diversas iterações o que tem dado resultados satisfatórios. Este método foi utilizado na composição da peça *DETERMINÍSTICA I* em março de 1992 [7].

3.2 RUÍDOS $1/f^{\beta}$

Se colocarmos um grão de pólem ou alguma pequena partícula numa gota de água e a observarmos num microscópio, veremos aquilo que é chamado de *movimento Browniano*. O grão de pólem vai subir, descer, parar, se movimentar para a esquerda, direita, sem nunca atingir nenhum tipo de equilíbrio aparente. O seu movimento parecerá totalmente aleatório. Além disso, a trilha percorrida tende a preencher todo o plano e, portanto,

[6] transladado em linguagem matemática.

[7] Todas as peças citadas neste trabalho estão disponíveis em fita cassete e podem ser encomendadas ao compositor através do Instituto de Artes da UNESP.

apesar da dimensão topológica desta curva ser 1, sua dimensão fractal é a mesma do plano, ou seja, 2. Por este motivo dizemos que a curva gerada por um movimento Browniano é um fractal.

O movimento descrito acima percorre duas dimensões. Se considerarmos apenas uma das dimensões deste movimento, estaremos nos referindo a um movimento Browniano de uma dimensão como mostra a figura 2 . Nesta figura, o eixo horizontal corresponde ao tempo e o vertical à posição da partícula. Este tipo de movimento, assim como grande parte dos fractais, é auto-semelhante : se considerarmos um intervalo de tempo de uma hora e analisarmos o espectro (distribuição das freqüências) da curva, veremos que ele é dado pela função $E(f) = \frac{1}{f^2}$, ou seja, freqüências de f hertz aparecem com intensidade $\frac{1}{f^2}$. Mas o mais interessante é que qualquer que seja o intervalo considerado (um minuto, uma hora, um dia), o espectro será sempre da forma $\frac{1}{f^2}$. Assim, qualquer trecho da curva é semelhante à curva toda em termos da distribuição das freqüências que a compõem.

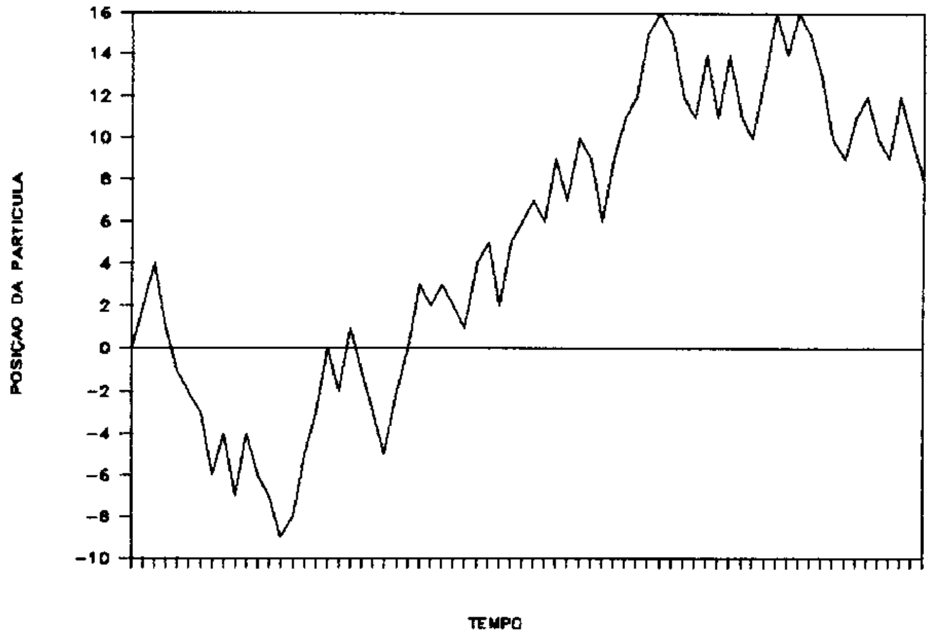

Figura 2: Uma representação aproximada de um movimento browniano.

Não é possível conceber um programa de computador que construa uma curva do tipo $\frac{1}{f^2}$ como descrita anteriormente pois tal curva é infinitamente complexa. Podemos, no entanto, determinar uma aproximação de tal curva composta por um número finito de segmentos de reta. A figura 2 foi construída desta maneira.

É possível construir curvas semelhantes com outros espectros. As mais freqüêntes são o ruído branco, $E(f) = \frac{1}{f^0} = 1$, e o ruído rosa, $E(f) = \frac{1}{f^1} = \frac{1}{f}$, também chamado de ruído $\frac{1}{f}$. Ambos aparecem de diferentes maneiras na natureza [8].

Se, ao olharmos para uma destas curvas, destacarmos pontos tomados a intervalos de tempo fixos e considerarmos a coordenada y destes pontos como a altura de notas musicais, obteremos uma melodia.

[8] Ver [MANDELBROT 83].

De acordo com o espectro da curva obteremos melodias com caráter diferente. Com espectro $\frac{1}{f^2}$ a melodia é repetitiva, monótona e previsível. Com $\frac{1}{f^0}$ a melodia não tem nada de previsível, o ouvinte nunca sabe o que virá depois e portanto fica perdido, sem referencial. Uma curva com espectro $\frac{1}{f}$ apresenta equilíbrio maior entre informação e redundância e pode-se dizer que, grosso modo, é a que mais apraz ao senso estético convencional.

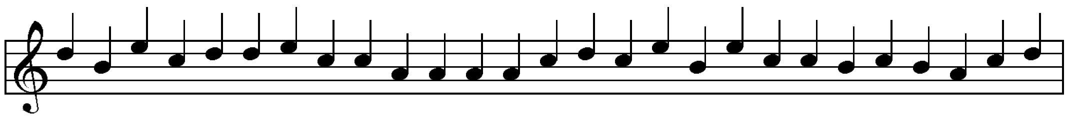

Figura 3: Melodia gerada a partir de ruído $\frac{1}{f^2}$.

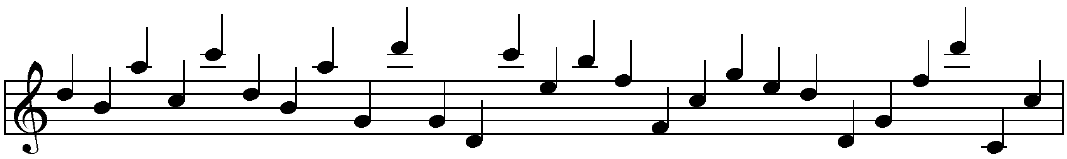

Figura 4: Melodia gerada a partir de ruído branco.

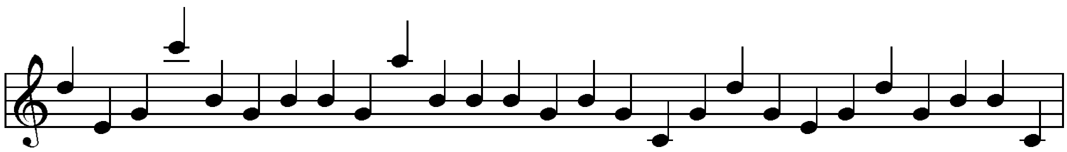

Figura 5: Melodia gerada a partir de ruído $\frac{1}{f}$.

Richard Voss fez análises dos espectros das linhas melódicas de diversos tipos de música [9], de Bach aos Beatles, e descobriu que todas apresentam um comportamento semelhante ao ruído $\frac{1}{f}$.

No início deste ano, compus duas obras com uma macro-estrutura semelhante à proposta na seção 3.1 e com desenhos melódicos gerados por ruído $\frac{1}{f^2}$ (no caso da peça *FracPal*) e por ruído $\frac{1}{f}$ (no caso de *Frac1/f*). Em julho passado, compus *FORCRAU*, utilizando de diversas formas o ruído $\frac{1}{f}$, uma peça para marimba e sintetizador controlado por computador.

3.3 Próximos passos

Michael Barnsley elaborou um novo algorítmo para a construção de aproximações de fractais; são os *Sistemas de Funções Iteradas* (SFI) [10]. Tal algorítmo vem sendo muito utilizado na computação gráfica devido à sua rapidez e versatilidade.

Michael Gogins apresentou em [GOGINS 91] uma aplicação dos SFI à composição musical. Será esta nova técnica o futuro da música por computador?

[9] Ver [VOSS 78].

[10] Ver [DEMKO et al 85].

BIBLIOGRAFIA

BARNSLEY, Michael Fielding (1988). *Fractals Everywhere*, San Diego, EUA, Academic Press.

CHAVES, Carlos Maurício G. Ferreira (1989). "Fenômenos de Agregação" em *Ciência Hoje*, 10(55), pp.26-32, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência.

DEMKO, Stephen, HODGES, Laurie e NAYLOR, Bruce (1985). "Construction of Fractal Objects with Iterated Function Systems" em *Computer Graphics* 19(3), pp. 271-278. SIGGRAPH Proceedings.

DODGE, Charles (1988). "Profile : A Musical Fractal" , em *Computer Music Journal* 12(3) , pp.10-14. Cambridge, MIT Press.

DODGE, Charles e T.Jerse (1985). *Computer Music : Synthesis, Composition and Performance*, New York, EUA, Schirmer Books.

DODGE, Charles e C.R. BAHN (1986). "Musical Fractals : Mathematical Formulas Can Produce Musical as well as Graphic Fractals", em *Byte* 11(6), pp.185-196, Peterborough, EUA, McGraw Hill.

GLEICK, James (1990). *CAOS : A Criação de uma Nova Ciência*, Rio de Janeiro, Campus. Tradução de Waltensir Dutra.

GOGINS, Michael (1991). "Iterated Functions Systems Music", em *Computer Music Journal* 15(1) , pp.40-48 , Cambridge, MIT Press.

MANDELBROT, Benoit B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*, Primeira edição, New York, Freeman.

PEITGEN, Heinz-Otto e RICHTER, Peter H. (1986). *The Beauty of Fractals*, Berlin, Springer-Verlag.

VOSS, Richard F. e CLARKE, J. (1978). "1/f Noise in Music : Music from 1/f Noise" em *Journal of the Acoustical Society of America*, 63(1), pp. 258-263.