ASPECTOS DE LÓGICA E TEORIA DA CIÊNCIA

Jair Minoro Abe

Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo

Instituto de Estudos Avançados da USP
2011

Abe, Jair Minoro
Aspectos de Lógica e Teoria da Ciência / Jair Minoro Abe. -- São Paulo, 2011.
Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo, 2011.

ISBN: 978-85-63007-02-5

Descritores: 1. Lógica paraconsistente 2.Teoria da Ciência 3.Amostragem 4.Automação 5.Redes neurais (Computação) 6. Indução 7. Robótica

Verificação Construtiva, Indução Empírica e Dedução Falibilista:

Um Triplo Contraste

Julio Michael Stern[2]

Resumo

Este artigo compara e contrasta três arcabouços epistemológicos comumente utilizados em ciências empíricas, juntamente com três teorias estatísticas de teste de hipótese que naturalmente os acompanham, a saber: (a) O falsificacionismo Popperiano e os p-valores da estatística freqüentista; (b) A teoria da decisão e chances de aposta Bayesianas; (c) O construtivismo cognitivo e os e-valores Bayesianos. Este artigo também discute a visão do filósofo Imre Lakatos de matemática como ciência quasi-empírica.

Palavras-chave: Construtivismo cognitivo; Estatística Bayesiana; Falsificacionismo Popperiano; Imre Lakatos; Neo-empiricismo; Paradoxo da probabilidade zero.

[2] Depto. de Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatìstica da Universidade de São Paulo. Rua do Matão 1010, Cidade Universitária; 05508-090, São Paulo, Brazil. jmstern@hotmail.com

Abstract

This article compares and contrasts three epistemological frameworks commonly used in empirical science, together with three statistical theories of hypothesis testing that naturally accompany them, namely: (a) Popperian falsificationism and the p-values of frequentist statistics; (b) Decision theory and Bayesian betting odds; (c) Cognitive constructivism and Bayesian e-values. This article also discusses the philosopher's Imre Lakatos view of mathematics as a quasi-empirical science.

Keywords: Bayesian statistics; Cognitive constructivism; Neo-empiricism; Imre Lakatos; Popperian Falsificationism; Zero probability paradox.

Problemas de jogos de aposta... parecem

abarcar a totalidade da estatística teórica.

Dubins e Savage 1965; How to Gamble If You Must.

Quem quiser resolver o problema da indução que se

acautele para não tentar provar coisas em demasia.

Karl Popper 1974; Replies to my Critics.

Com uma solução positiva para o problema da indução,

ainda que rasa, teorias metodológicas de demarcação podem

ser elevadas de convenção arbitraria a metafísica racional.

Imre Lakatos 1974; A Plea to Popper for a Whiff of Inductivism.

Omega: *Não gosto desta mudança de verdade para racionalidade.*

Racionalidade de quem? Sinto uma infiltração convencionalista.

Imre Lakatos 1976; Proofs and Refutations.

1. Introdução

As quatro citações abrindo este artigo demarcam seu escopo e área de interesse geral. Elas se relacionam com o problema de verificação de teorias no contexto de ciências empíricas. A citação de Savage enuncia o credo neo-empiricista baseado na metáfora do jogador, de acordo com a qual, as crenças racionais sobre teorias científicas bem como os processos de aprendizado associados seguem as regras lógicas da indução, a mesmíssima lógica das tradicionais apostas de cassino. A citação de Popper alude às bem conhecidas dificuldades em aplicar o conceito de indução, especialmente no caso de hipóteses precisas ou exatas. Algumas destas dificuldades são relacionadas ao Paradoxo da Probabilidade Zero, ou PPZ. Não obstante, a citação de Lakatos sobre indução refere-se a seu anseio por alguma forma de elevação (aufhebung) de metodologia científica a metafísica racional, isto é, ele procura uma forma de verificar teorias na boa prática científica que justifique ou explique porque seria razoável aceitar estas teorias (ainda que provisoriamente) como sentenças que carregam um conteúdo verdadeiro. Este é o coração do clássico problema da verificação empírica de hipóteses científicas. Finalmente, a citação de Lakatos sobre verdade e racionalidade, refere-se à sua visão de matemática como ciência quasi-empírica.

É difícil escolher uma palavra entre verificação, confirmação, corroboração, e semelhantes, pois todas elas estão altamente sobre-carregadas com significados muito específicos. Escolhemos verificação por sua ligação etimológica direta à veracidade do conteúdo de uma sentença. Analisaremos o problema de verificação e outras questões relacionadas da perspective do Con-Cog - o arcabouço epistemológico do Construtivismo Cognitivo - equipado com a aparelhagem estatística do FBST - o Teste de Significância Bayesiano Completo. O FBST, por seu turno, define uma função de suporte estatístico para hipóteses precisas, a saber, o *e*-valor - *valor epistêmico* de uma hipótese em função dos dados observacionais, ou *valor da evidência* nos dados observacionais em suporte à hipótese.

A solução oferecida pelo FBST ao problema de verificação é em verdade muito rasa, no sentido de que a função de suporte proposta, o e-valor, embora baseada na medida de *probabilidade* Bayesiana aposteriori, fornece apenas uma medida de *possibilidade* para a hipótese em julgamento. Veremos como esta aparente fraqueza é de fato a chave para sobrepujar as barreiras de impossibilidade nos resultados clássicos aludidos por Popper. No entanto, a simultânea caracterização por parte do Con-Cog dos objetos suportados (hipóteses precisa ou exatas) como auto-soluções, implica num conjunto de propriedades essenciais tão fortes e ricas que a solução Con-Cog torna-se também muito positiva.

Ademais, o aparato formal do FBST naturalmente implica uma lógica, isto é, um cálculo de crenças abstrato para a composição das funções de suporte e um mecanismo de propagação de valores verdade em redes credais. Neste contexto, podemos sustentar a causa do arcabouço Con-Cog como uma solução para (uma forma específica) do problema de verificação que é capaz de atender (ao menos uma parte substancial) do desejo de Lakatos.

Nas seções subseqüentes, tentaremos explicar e clarificar vários aspectos relacionados à abordagem Con-Cog para verificação de hipóteses, contrastando distintas visões do assunto. A seção 2 fornece uma breve revisão do arcabouço Con-Cog, incluindo sua metáfora central de objetos como tokens para auto-soluções. A seção 2 também contrasta o Con-Cog com as metáforas centrais do empiricismo neo-clássico e do falsificacionismo Popperiano, a saber, as metáforas do jogo de apostas e do tribunal científico. A seção 3 apresenta o Paradoxo da Probabilidade Zero, contrastando duas medidas padrão utilizadas para a verificação de teorias, a saber, os clássicos p-valores da estatística freqüestista e as chances de aposta da estatística Bayesiana embasada na teoria da decisão. Esta discussão é ilustrada por dois famosos exemplos de aplicação devidos a Charles Saunders Peirce. A seção 4 fornece nossas conclusões acerca da natureza da verificação construtiva em ciência empírica. A seção 5 apresenta a versão do Con-Cog da tese de Imre Lakatos sobre matemática como uma ciência quasi-empírica. A seção 6 apresenta comentários finais e caminhos para pesquisa futura.

No limitado espaço deste artigo, não podemos nos dar ao luxo de explicar nenhuma das teorias estatísticas anteriormente mencionadas, nem de fornecer uma revisão mais detalhada dos arcabouços epistemológicos acima referidos. O texto [2] acompanha naturalmente o presente artigo, apresentando a teoria formal do FBST. Recomendamos também as seguintes fontes: Para uma perspectiva mais ampla sobre o FBST, vide [23, 31, 38, 39]. Para a abordagem Bayesiana ortodoxa, vide [5, 8, 9]. Para os clássicos *p*-valores, vide [29].

2. Revisão sobre o Construtivismo Cognitivo

O arcabouço Con-Cog assenta-se sobre duas metáforas básicas: A metáfora *Objetos como auto-soluções*, devida a Heinz von Forster e a metáfora *Autopoiese e cognição*, devida a Humberto Maturana e Francisco Varela. Estas são as metáforas chave para a ontologia e a metafísica no Con-Cog. Esta seção apresenta de forma brevíssima estas duas metáforas; [10, 25] são as referências fundamentais.

O conceito de sistema autopoiético é uma abstração que almeja modelar as propriedades essenciais de um organismo vivo. Sistemas autopoiéticos são sistemas dinâmicos (dissipativos) em não-equilíbrio exibindo estruturas (meta) estáveis, cuja organização permanece invariante (por longos períodos) no tempo, não obstante a freqüente substituição de seus componentes. Ademais, estes componentes são produzidos pelas mesmas estruturas que eles regeneram.

Para poder dar respostas apropriadas às complexidades do ambiente, sistemas autopoiéticos podem ser organizados hierarquicamente como sistemas autopoiéticos de ordem superior. Um exemplo típico é uma colméia, um sistema autopoiético de terceira ordem, formado pelo acoplamento de abelhas individuais, os sistemas de segunda ordem, que por sua vez são formadas pelo acoplamento de células individuais, os sistemas de primeira ordem.

Os processos regenerativos na rede de produção de um sistema autopoiético sempre requerem a aquisição de recursos como novos matérias, energia e neg-entropia (ordem) do meio ambiente no qual o sistema se encontra. A aquisição eficiente dos recursos necessários demanda (inter)ações seletivas que, por sua vez, precisam ser baseadas em processos de inferência apropriados (predições). Assim, estes processos de inferência caracterizam o domínio de interações deste agente como um domínio cognitivo.

Não obstante o fato da metáfora de autopoiese ter sido desenvolvida para explicar as características essenciais de um organismo vivo, o conceito de sistema autopoiético tem sido aplicado à análise de muitos outros sistemas autônomos, sejam eles concretos ou abstratos, como por exemplo sistemas sociais e organizações corporativas, vide [22, 49]. Em particular, sistemas de pesquisa científica podem ser visto sob esta luz, vide [17, 22].

A Figura I apresenta uma estrutura idealizada e dinâmica de produção de conhecimento. O diagrama representa, no lado experimental (coluna da esquerda), as operações de campo ou laboratório de uma ciência empírica, onde experimentos são desenhados e construídos, efeitos observáveis são gerados e/ou medidos, e os bancos de dados experimentais são montados. No lado da teoria (coluna da direita), o diagrama representa o trabalho teórico de análise estatística, interpretação e (assim se espera) entendimento de acordo com os padrões aceitos. Se necessário, novas hipóteses (incluindo até teorias inteiras) são formuladas, motivando o desenho de novos experimentos. Teoria e experimentação constituem um ciclo de dupla retro-alimentação, tornando claro que o desenho de novos experimentos é guiado pela teoria existente e sua interpretação que, por seu lado, é constantemente checada, adaptada e modificada para dar conta das observações experimentais. O sistema como um todo constitui uma unidade autopoiética.

Experimento				Teoria
Modelos	$\Leftarrow$	Metáfora	$\Leftarrow$	Teorias
Operacionais		analogia		Hipóteses
$\Downarrow$				$\Uparrow$
Implementação		Auto-Solução		Princípios
tecnológica		Verdadeira/Falsa		Metafísicos
$\Downarrow$				$\Uparrow$
Aquisição		Análise		Valores verdade
de dados	$\Rightarrow$	estatística	$\Rightarrow$	funções suporte
Espaço Amostral				Espaço paramétrico

Figura I - Diagrama de produção Científica

Objetos como Tokens para Auto-Soluções

A característica circular (cíclica ou recursiva) dos processos autopoiéticos regenerativos e suas auto-soluções (invariantes, pontos fixos, ou estados de equilíbrio, homeostáticos, recorrentes ou recursivos), em sistemas autopoiéticos concretos ou abstratos, são investigados por von Foerster em [10, 37]. A natureza recursiva de sistemas autopoiéticos produz estados recorrentes ou soluções estáveis. Sob condições apropriadas, uma destas soluções, se apresentada ao sistema, irá regenerar a si mesma como um ponto fixo ou estado de equilíbrio. Estas soluções são chamadas auto-valores, auto-vetores, auto-funções ou, em geral, auto-soluções. O conceito de auto-solução é a chave para distinguir objetos específicos no domínio cognitivo de um sistema autopoiético. Objetos são *"tokens para auto-soluções"*. (Uma bola de futebol é algo que interage com um ser humano exatamente da forma que se espera que uma bola de futebol o faça.) Auto-soluções podem ainda ser marcadas ou rotuladas por palavras (bola-da-FIFA), e estas palavras podem ser articuladas em uma linguagem.

Obviamente, as regras de articulação definidas por uma linguagem, sintáticas, gramaticais ou semânticas, só farão esta linguagem útil se elas de alguma forma corresponderem à regras de composição válidas para os objetos que estas mesmas palavras designam.

Ademais, von Foerster estabelece quatro atributos essenciais para auto-soluções: Auto-soluções são ontologicamente discretas, estáveis, separáveis e componíveis. Em vários exemplos bem conhecidos das ciências exatas, estes quatro atributos essenciais levam ao conceito de base, base de um espaço vetorial finito, como em álgebra linear, base de um espaço de Hilbert, como em análise de Fourier ou análise de ondaletas (wavelets), ou bases mais abstratas, como em uma estrutura de matróide. Não obstante, o conceito de auto-solução e seus quatro atributos essenciais é tão importante no arcabouço do Con-Cog, que ele é utilizado como uma metáfora muito mais geral, não necessariamente em contextos formais. Em particular, o adjetivo *objetivo* refere-se ao grau em que é possível verificar a existência da auto-solução correspondente a um objeto, e a qualidade com que este objeto manifesta os quatro atributos essenciais de von Foerster. Para uma interpretação detalhada destes quatro atributos essenciais no arcabouço Con-Cog, bem como alguns exemplos, vide [40-43].

É importante perceber que o termo 'discreto', como utilizado por Von Foerster para qualificar auto-soluções em geral, deve ser substituído, dependendo do contexto específico, por termos como de-dimensão-inferior, preciso, exato, singular, etc. Até no caso familiar de álgebra linear, se definirmos os auto-vetores correspondendo a um auto-valor singular, c, de uma transformação linear, $T(\ )$, apenas pela propriedade essencial de invariância direcional, $T(x)=cx$, obteremos sub-variedades uni-dimensionais que, neste caso, são sub-espaços ou linhas retas passando pela origem. Apenas se acrescentarmos a condição usual (embora não essencial) de normalização, $||x||=1$, é que obtemos auto-vetores discretos. Esta propriedade essencial de auto-soluções, precisão ou exatidão, é a chave que abre a possibilidade de representarmos na linguagem objetos clara ou nitidamente definidos. Na p.128 de [37], von Foerster declara:

"Dentre o infinito contínuo de possibilidades, operações recursivas esculpem um conjunto preciso de soluções discretas. Auto-comportamentos geram entidades discretas e identificáveis. Produzir entes discretos a partir de uma variedade contínua tem conseqüências incrivelmente importantes. Isto nos permite começar a nomear as coisas. Linguagem é a possibilidade de esculpir dentre um número infinito de experiências possíveis aquelas experiências que permitem interações estáveis de si consigo mesmo.".

O arcabouço Con-Cog assume que um objeto sempre é observado por um observador, assim como um organismo vivo ou um sistema autopoiético abstrato interagindo com o ambiente. Portanto, este arcabouço afirma que manifestações de auto-soluções e correspondentes propriedades dos objetos são respectivamente guiadas e especificadas por ambos - sistema e ambiente. De forma mais concisa, Con-Cog sustenta as seguintes posições:

Idealismo: A crença de que o conhecimento que um sistema tem de um objeto é sempre dependente das relações autopoiéticas deste sistema.

Realismo: A crença de que o conhecimento que um sistema tem sobre um objeto é sempre dependente das restrições do ambiente.

Conseqüentemente, a perspective Con-Cog requer um delicado equilíbrio, chamado *Idealismo objetivo ou realista*.

2.1 As Metáforas do Cassino e do Tribunal Científico

A metáfora do cassino ou do jogador, acompanhada do colorido jargão de chances de aposta, está no coração do empiricismo neo-clássico. Na p.152,V.2 de [20], Lakatos afirma:

"O empiricismo neo-clássico tem um dogma central: o dogma da identidade entre (1) probabilidades, (2) grau de suporte evidencial (ou confirmação), (3) grau de crença racional, e (4) coeficientes de aposta racionais. Esta 'cadeia neoclássica de identidades' não é implausível. Para um verdadeiro empiricista, a única fonte de crença racional é suporte evidencial, portanto, ele iguala grau de crença racional com grau de suporte evidencial. Mas é plausível que crença racional seja medida por coeficientes racionais de aposta. Afinal, foi para determinar coeficientes racionais de aposta que o cálculo de probabilidades foi inventado."

Em um jogo onde há conhecimento apriori sobre os competidores, incluindo diferenças percebidas na força, habilidade ou outras vantagens justas ou injustas, um sistema de pontuação com handicap ou compensações pode ser desenvolvido para equilibrar as chances de vitória de todos os competidores. Um jogo de apostas, com todas as suas manhas e peculiaridades, é a metáfora guia da teoria da decisão e da estatística Bayesiana ortodoxa. Vários aspectos e conseqüências do uso desta metáfora são analisados em [5, 8, 9, 40-43].

Um tribunal moderno segue o princípio do *in dubio pro reo*, dando ao réu o benefício da dúvida, isto é, o réu é considerado inocente até que seja provada sua culpa. O benefício da dúvida é conseqüência do princípio do *onus probandi* ou ônus da prova, que afirma - *semper necessitas probandi incumbit ei qui agit*, que pode ser traduzido como - o ônus da prova sempre recai sobre o agente da acusação. De um lado, o benefício da dúvida torna mais difícil condenar um réu. Por outro lado, o veredito de um julgamento nunca pode ser "inocente", apenas culpado ou não culpado.

Na metáfora do tribunal, uma lei científica é (provisoriamente) aceita pelo tribunal como verdadeira, até que esta seja refutada ou provada errônea por evidência pertinente. Evidência pertinente que pode ser utilizada na corte científica para refutar uma teoria tem a forma de observações empíricas que discordam das conseqüências ou previsões feitas pela teoria em julgamento. Ademais, um julgamento justo no tribunal científico pode assegurar a validade das deduções que levaram a uma prova de falsidade, mas não pode dar uma certificação ou garantia referente à validade ou boa qualidade da teoria.

Ciências empíricas, especialmente nas assim chamadas ciências exatas, como física, química ou engenharia, lidam com entidades quantitativas. Ademais, a prática padrão destas ciências também requer que a veracidade de hipóteses científicas seja avaliado de forma quantitativa, isto é, que hipóteses seja submetidas a um julgamento quantitativo concernente a sua acuracidade e precisão. Ainda mais, o arcabouço Con-Cog nos permite modelar o desenvolvimento da ciência no contexto de sistemas dinâmicos e processos evolutivos, vide [16] e o Cap.5 de [43]. Entretanto, medidas de ordem e progresso neste tipo de contexto também requerem métricas para avaliar a objetividade de um conceito, o valor epistêmico de uma hipótese, o ajuste ou adaptação de uma teoria, e assim por diante. Dada a importância das métricas utilizadas para avaliar afirmações científicas, e os muitos papéis que elas desempenham na prática da ciência, deveríamos escolher estas métricas com extrema atenção, cuidado e cautela, desenhando apropriadamente sua estrutura e regulando sua força e equilíbrio. As métricas padrão usadas em ciência empírica são baseadas em estatística matemática. Não obstante alguns cálculos credais terem sido capazes de ocupar com sucesso alguns nichos locais e encontrar aplicações especiais, a moderna análise estatística de dados não tem rival a altura em sua elegância, robustez, flexibilidade, poder computacional, e generalidade de seu escopo de aplicações. Entretanto, existem alguns problemas não resolvidos há muito pendentes relacionados ao uso de métricas estatísticas no contexto de verificação de hipóteses. Este é o assunto da próxima seção.

3. O Paradoxo da Probabilidade Zero

Para apreciar integralmente o arcabouço Con-Cog+FBST, e fazer mais contrastes com outras abordagens, utilizaremos dois exemplos famosos dados no século XIX pelo filósofo Charles Saunders Peirce. Estes exemplos concernem a abdução e indução de hipóteses, estudando possíveis procedimentos para adivinhar, justificar, e testar assertivas em modelos estatísticos.

O conceito Peirceano de indução, como utilizado nestes dois exemplos, seria hoje denominado *estimação de parâmetros*. Enquanto isto, o conceito Peirceano de abdução seria hoje em dia denominado *seleção de modelos*. No contexto destes dois exemplos, indução e abdução teriam ainda relação com o conceito contemporâneo de *teste de hipótese*. A bem da simplicidade, ao invés de utilizar a terminologia original empregada por Peirce, apresentamos estes dois exemplos traduzindo-os para uma linguagem estatística contemporânea. Temos a esperança de 'tradurre senza tradire', isto é, traduzir sem trair o sentido original ou perder sua intuição. Também revisaremos alguns tratamentos modernos para estes dois problemas prototípicos. Como veremos, muitos aspectos dos tratamentos modernos, bem como muitas de suas inerentes dificuldades, foram antevistas, de uma forma ou outra, no trabalho de Peirce. O Paradoxo da Probabilidade Zero (PPZ) está no coração das aludidas dificuldades, e será estudado em algum detalhe.

3.1 Dois Exemplos de Ch.S.Peirce

O primeiro dos exemplos de Peirce concerne a indução de freqüências de letras e a abdução de códigos de cifras, vide CP.5.273. O exemplo das cifras, descrito em linguagem estatística contemporânea, é o seguinte:

- Dados os livros (em Inglês) **Erro!**, Compilamos os vetores **Erro!** com as freqüências com que cada letra do alfabeto ocorre no texto. Notamos que estes vetores concordam (aproximadamente) com as freqüências médias no vetor λ^a.

- Dado um novo livro (em Inglês) , B_{k+1}, podemos afirmar, por Indução, que seu vetor de freqüências, λ^{k+1} (ainda não compilado) também será (aproximadamente) igual a λ^a.

- Dado um livro em código, C, cujo texto foi encriptado usando uma cifra de substituição simples, compilamos o seu vetor de freqüência de letras, λ^c. Notamos que há um e apenas um vetor de permutações, π, que pode ser usado para (de forma aproximada) casar os vetores λ^a e λ^c, isto é, existe uma única bijeção $\pi=[\pi(1),\pi(2),\ldots\pi(m)]$, onde m é o número de letras no alfabeto Inglês, tal que $\lambda^a(j)\approx\lambda^c(\pi(j))$, para $1\leq j\leq m$. Neste caso, podemos enunciar, por Abdução, a hipótese de que o vetor π é a chave correta para a cifra.

Uma formulação padrão para a parte de indução deste exemplo inclui a estimação de parâmetros (incluindo a estimação da distribuição aposteriori, da verossimilhança ou ao menos de intervalos de confiança estimadores pontuais dos parâmetros) em um modelo Dirichlet-Multinomial n-dimensional, onde m é o número de letras no alfabeto Inglês, vide [32]. O espaço paramétrico deste modelo é o $(m-1)$-simplex, **Erro!**. Este modelo é muito semelhante ao modelo Dirichlet-Multinomial trinomial utilizado para o exemplo Hardy-Weinberg em [2]. Uma possível formulação da parte de abdução envolve expandir o espaço paramétrico do modelo básico para $\Theta=\Lambda\times\Pi$, onde Π é o espaço discreto das m-permutações que codifica a chave da cifra.

A hipótese (abdutiva) de Peirce sobre a cifra enuncia o 'correto' ou 'verdadeiro' vetor de permutações, π^0. Esta hipótese tem uma peculiaridade interessante: O espaço paramétrico, $\Theta=\Lambda\times\Pi$, tem um sub-espaço contínuo, Λ, e um sub-espaço discreto (na verdade, finito), Π. Entretanto, a hipótese apenas envolve (diretamente) a parte discreta. Esta peculiaridade torna a hipótese muito simples, e passível do tratamento dado por Peirce. Todavia, super-simplificação pode ser algo perigoso, como será visto a seguir no segundo exemplo de Peirce, dado em in CP.2.707, concernente a abdução de hipóteses com parâmetros contínuos.

"[Kepler] delineou as várias conseqüências da suposição de que Marte se move sobre uma elipse, com o Sol em um dos focos, e mostrou que tanto as longitudes como as latitudes resultantes desta teoria estavam de acordo com as observações. ...O termo Hipótese [significa] uma proposição em que se crê porque suas conseqüências concordam com a experiência."

Ao invés de formular a hipótese de Kepler em um modelo estatístico contemporâneo, faremos uso outro modelo contínuo que já está à mão, a saber, o modelo de Hardy-Weinberg formulado em [2]. Para uma hipótese precisa H enunciada em um espaço paramétrico contínuo, Peirce percebe que não podemos falar sobre a probabilidade de H dadas as observações ou, mais exatamente, que $\Pr(H|X)=0$, ou seja, a probabilidade de um enunciado desta forma é sempre zero. Isto é parte de uma síndrome complexa - Paradoxo da Probabilidade Zero. Como conseqüência, usando uma expressão do filósofo Imre Lakatos, Peirce propõe *deslocar o problema* (shift the problem). Ao invés de perguntar sobre a veracidade da hipótese, considerando os dados já obtidos, Peirce propõe indagar sobre a possibilidade de obter dados mais ou menos compatíveis com a hipótese, assumindo que esta seja verdadeira.

A idéia de Peirce para testar a hipótese da cifra é um precursor dos procedimentos modernos da estatística Bayesiana baseada em teoria da decisão, que computam valores de suporte como *probabilidade aposteriori* ou *chances de aposta*. A idéia de Peirce para testar a hipótese de Kepler e outras hipóteses contínuas é um precursor de procedimentos estatísticos que computam valores de suporte como os *p-valores* da estatística clássica (curiosamente, temos agora também versões Bayesianas disto). Na próxima seção tentaremos fazer uma revisão intuitiva e não técnica destas duas soluções prototípicas, contrastando-as com o FBST. Para mais detalhes, vide [43].

3.2 Soluções Freqüentista e Bayesiana para Análise Estatística dos Exemplos de Peirce

A abordagem de Peirce para o primeiro exemplo leva, na teoria estatística Bayesiana ortodoxa (baseada em teoria da decisão), a uma probabilidade aposteriori da hipótese calculada em função do banco de dados observacional. Esta abordagem funciona bem para o problema da cifra. De fato, quando o número de observações cresce, as probabilidades aposteriori convergem automaticamente, concentrando suporte pleno (probabilidade 1) na hipótese verdadeira. Portanto, neste problema simples, podemos de fato confundir os problemas de indução e abdução. No contexto de um conjunto finito de hipóteses alternativas, pode-se falar equivalentemente sobre a probabilidade aposteriori da hipótese H_i, a saber p_i=Pr(H_i|X), ou sobre as chances de aposta da hipóteses H_i, a saber, b_i=p_i/(1−p_i).

A solução da probabilidade aposteriori pode ser adaptada para problemas com espaço paramétrico contínuo, contanto que consideremos apenas partições do espaço paramétrico em um número finito de conjuntos de medida não-nula, correspondendo a hipóteses grossas, imprecisas ou inexatas. No entanto, esta abordagem desmorona tão logo sejam consideradas hipóteses precisas. A razão deste colapso é a armadilha da probabilidade-zero: Uma hipótese precisa tem probabilidade (ou medida natural de Lebesgue) zero e, portanto, probabilidade apriori zero. Ademais, a natureza multiplicativa da operação de escala probabilística, vide Borges e Stern (2007,Tabela 1), nunca atualizará uma probabilidade zero para uma probabilidade diferente de zero, vide [2, 4]. Esta é a origem do paradoxo PPZ. Se agora considerarmos o arcabouço Con-Cog, poderemos compreender a síndrome PPZ em sua plenitude:

(1) A metáfora 'objeto como auto-solução' implica na precisão das correspondentes hipóteses estatísticas. (2) Hipóteses precisas tem probabilidade apriori zero (na medida natural de Lebesgue). (3) Probabilidade apriori zero implica em um suporte perpetuamente nulo. Desta maneira podemos entender a seguinte conclusão enunciada por Lakatos na p.154,V.2 de [20]:

"Mas então, graus de suporte evidencial não podem ser o mesmo que graus de probabilidade [de uma teoria] no sentido do cálculo de probabilidade. Tudo isto seria trivial se não fosse o antigo e respeitado dogma que chamo de a 'cadeia neo-clássica' identificando, entre outras coisas, coeficientes racionais de aposta com graus de suporte evidencial. Este dogma confundiu gerações de matemáticos e de filósofos."

Existem dois modos óbvios de escapar desta encrenca: (A) Arrumar a matemática para evitar o PPZ, ou (B) Proibir o uso de hipóteses precisas.

(A) Arrumar a matemática no contexto Bayesiano ortodoxo (e da teoria da decisão padrão) para evitar o PPZ é algo que é mais facilmente dito do que feito. A moderna estatística Bayesiana arranjou diversas manobras técnicas tentando circundar o PPZ. Algumas das mais bem conhecidas dentre estas técnicas são os testes de Jeffrey e outras chances de aposta com sistemas de handicap ou ajuste de pontuação permitindo a competição de hipóteses precisas. Estas técnicas fornecem procedimentos ad-hoc para uso prático, mas são atormentadas por inconsistências internas, como o paradoxo de Lindey, ou pela necessidade de justificar pré-supostos auxiliares ad-hoc (como a escolha de chances de aposta iniciais, ou as características do desenho de densidades apriori artificiais - um oxímoro óbvio, etc.). Este precário estado da arte é plenamente reconhecido e admitido na estatística Bayesiana ortodoxa baseada na teoria da decisão, vide Sec.10.3 de [50]. De fato, a resposta ortodoxa é que esta confusão não é culpa da ciência estatística, mas sim culpa do paradigma de formulação de hipóteses precisas tão em voga nas ciências exatas. Esta atitude leva a justificativas para a segunda solução.

(B) Proibir o uso de hipóteses precisas pode ser muito tentador do ponto de vista da ortodoxia Bayesiana, todavia, é inexeq"uivel na prática estatística: Cientistas e outros usuários da ciência estatística simplesmente insistem no uso de hipóteses precisas, como se fossem magneticamente atraídos pelas mesmas, e demandam métodos estatísticos apropriados. Da perspectiva Con-Cog, estes cientistas estão cobertos de razão, e fazendo justamente a coisa certa. Como uma solução de compromisso, alguns livros-texto influentes oferecem métodos como testes de Jeffrey, tomando todavia o cuidado de postar um assustador caveat emptor, deixando claro que o usuário esta entrando em território perigoso por sua própria conta e risco. D.Williams, na p.234 de [48], faz um pronunciamento típico:

"Significância de hipóteses precisas: um apelo a sanidade: ...Me é assombroso portanto que alguns Bayesianos agora atribuam uma probabilidade apriori não-nula para que uma hipótese precisa seja exatamente verdadeira apenas para obter resultados que parecem suportar hipóteses nulas que os freqüentistas mui definitivamente rejeitariam. (É o óbvio ululante que este tipo de resultado é uma conseqüência inevitável)."

Este ponto é tão importante quanto é sutil. Para entende-lo corretamente, permitam-nos primeiramente relembrar o paradigma ortodoxo, como este é concisamente enunciado por Dubins e Savage na p.229,230, Sec.12.8, de [5]. Na segunda citação, de Savage na p.254,Sec.16.3 de [35], encontramos que hipóteses precisas, mesmo se importantes, fazem pouco sentido neste paradigma, uma proposição que é aceita em toda a estatística Bayesiana ortodoxa baseada na teoria da decisão.

"Problemas de jogos de aposta, em que distribuições de várias quantidades são proeminentes na descrição da fortuna do jogador, parecem abarcar a totalidade da teoria estatística de acordo com esta visão, que pode ser denominada a visão Bayesiana baseada na teoria da decisão deste assunto."

"Muita atenção é dada na literatura estatística à tarefa de testar ...hipóteses extremas (precisas), como eu as denomino.

A inaceitabilidade de hipóteses extremas (precisas) é perfeitamente bem conhecida; ela é intimamente relacionada à conhecida máxima de que ciência desprova, mas nunca prova hipóteses. O papel desempenhado por hipóteses extremas (precisas) em ciência e outras atividades estatísticas parece ser importante mas obscuro. Em particular, embora eu, como todo mundo que pratica estatística, tenha muitas vezes 'testado' hipóteses extremas (precisas), eu não posso dar uma análise satisfatória deste processo, nem dizer claramente como ele se relaciona aos testes de hipótese definidos neste capítulo e outras discussões teóricas."

A intuição de Peirce para testar hipóteses precisas no seu segundo exemplo leva aos p-valores da estatística clássica. O p-valor é definido como a probabilidade acumulada dos bancos de dados que são 'mais extremos' que o de fato observado, isto é, o p-valor integra (ou soma) a probabilidade de todos os possíveis bancos de dados (de mesmo tamanho, ou com mesma regra de parada) resultantes do experimento que tem uma probabilidade menor de ocorrer que a o banco de dados obtido.

O p-valor é uma solução prática que funciona razoavelmente bem para uma hipótese *singular* ou *pontual*, isto é, uma hipótese afirmando que o verdadeiro valor do parâmetro de um modelo tem um valor específico, π^1. O p-valor tem algumas propriedades assintóticas desejáveis, por exemplo: O p-valor converge para zero se a hipótese é falsa, $\pi^0 \neq \pi^1$, e tem uma distribuição limite uniforme se a hipótese é verdadeira, $\pi^0 = \pi^1$. Estas propriedades são muito convenientes, pois elas podem ser usadas para obter aproximações numéricas relativamente fáceis de calcular. Hoje em dia é difícil apreciar a importância destas propriedades em um mundo onde computadores digitais não estavam disponíveis, e modelagem estatística tinha que ser feita utilizando ferramentas como réguas de cálculo, tábuas numéricas e cartas gráficas, vide Picket (1965).

Lakatos, na p.31-32,V.2 de [20], faz comentários muito interessantes concernentes às correspondências conceituais e históricas entre o falsificacionismo Popperiano e a teoria estatística dos p-valores para teste de hipóteses desenvolvida por Neyman-Person-Wald. Por exemplo:

"Como as dificuldades com a indução eram bem conhecidas há muito tempo, é admirável que independente e quase simultaneamente Neyman e Popper encontraram um estratagema revolucionário para substituir o raciocínio indutivo por um processo dedutivo de teste de hipótese. Eles então prosseguiram e desenvolveram esta idéia central que compartilhavam em direções diferentes, Popper desenvolvendo-a filosoficamente, enquanto Neyman (trabalhando conjuntamente com Pearson) mostrou como implementá-la na prática científica."

Por maior que seja sua utilidade prática, mesmo no caso de hipóteses pontuais, os p-valores podem ser criticados sob alguns aspectos técnicos. Por exemplo, a não conformidade com o *princípio da máxima verossimilhança* de boa inferência estatística, vide [26, 46]. O p-valor oferece ainda uma resposta traiçoeira, pois ele traduz uma pergunta relacionada ao espaço paramétrico em uma pergunta completamente diferente enunciada no espaço amostral. Isto leva a uma série de dificuldades de interpretação, vide por exemplo [34]. No entanto, a solução dos p-valores realmente começa a desmoronar no caso de hipóteses compostas, isto é, sub-variedades próprias do espaço paramétrico. A hipótese de equilíbrio Hardy-Weinber, por exemplo, constitui uma sub-variedade 1-dimensional no espaço paramétrico 2-dimensional. A maior razão deste desmoronamento é que a anteriormente mencionada 'definição' de p-valor não é, a bem da verdade, de modo algum uma definição. No caso de hipóteses compostas, não há uma ordem pré-estabelecida no espaço amostral e, portanto, nenhuma noção natural de 'mais extremo'. Uma forma padrão de ajeitar a definição de p-valor é testar a hipótese auxiliar simples $\pi^0=\pi^*$, onde π^* é o estimador de máxima verossimilhança (ou o estimador MAP - máxima densidade aposteriori) sob a hipótese original, dadas as observações efetuadas. Todavia, a hipótese auxiliar de máxima verossimilhança é post-hoc e, portanto, é questionável até que ponto ela representa adequadamente a hipótese original.

Outras alternativas consideram uma redução apriori ou projeção da hipótese composta sobre uma hipótese simples através de um procedimento de eliminação de parâmetros julgados incômodos ou espúrios (nuisance parameters). Basu fornece uma excelente revisão contendo mais de 10 diferentes técnicas para este propósito em [1]. Todavia, estes procedimentos são soluções caso-a-caso, e podem tornar-se tecnicamente complicados, não sendo sequer sempre disponíveis. As probabilidades aposteriori da estatística Bayesiana baseados na teoria da decisão e os p-valores da estatística clássica, bem como uma multidão de variações destes paradigmas, tem uma coisa em comum: As manobras utilizadas para circundar as dificuldades técnicas inerentes criam soluções caso-a-caso. Portanto, soluções dadas a problemas distintos não podem ser diretamente comparadas nem imediatamente combinadas. Portanto, nestes paradigmas, é impossível definir regras lógicas gerais ou cálculos abstratos de crença para a composição e propagação das funções de suporte, como as regras definidas para o FBST em [2].

A solução FBST para teste de hipóteses precisas pode ser vista como um 'dual' do p-valor - no sentido de que o e-valor acumula a massa de probabilidade dos pontos mais extremos no espaço paramétrico, à semelhança do que o p-valor faz no espaço amostral. Surpreendentemente, o uso do e-valor e idéias correlatas foi apenas proposto muito tardiamente na história da ciência estatística, em [30].

O FBST faz uma clara distinção entre o espaço das hipóteses e o espaço paramétrico, adotando medidas distintas em cada um deles, a saber, a medida aposteriori natural da estatística Bayesiana no espaço paramétrico, e a medida possibilística do e-valor no espaço das hipóteses. Tem havido várias propostas para utilizar medidas alternativas, que no entanto não fizeram uma distinção tão clara entre os espaços paramétrico e das hipóteses, mantendo em ambos a mesma medida, como tem sido usual na teoria estatística. Excelentes revisões destas teorias e muitas outras tentativas de resolver os enigmas do PPZ e outros paradoxos correlatos, são discutidas em [6, 13, 15, 24, 44].

4. Conclusões Acerca da Verificação Construtiva

Nas últimas seções vimos como o arcabouço Con-Cog foi capaz de domar o PPZ - o Paradoxo da Probabilidade Zero. Este processo envolveu três passos conceituais básicos:

1- Adotar o esquema geral Bayesiano de modelagem estatística, incluindo a medida de probabilidade aposteriori no espaço paramétrico;

2- Fazer uma clara distinção entre o espaço paramétrico e o espaço das hipóteses;

3- Definir a medida possibilística do e-valor para o espaço das hipóteses.

Algumas das propriedades mais importantes do e-valor são:

4- O uso da medida possibilística do e-valor é totalmente compatível e coerente com o uso da medida de probabilidade aposteriori na espaço paramétrico, $p_n = p(\theta | X)$. De fato, o FBST é construído sobre a medida aposteriori, pois o e-valor é definido como uma integral na medida $p_n(\theta)d\theta$.

5- A definição do e-valor (e funções verdade) engendra uma lógica, isto é, regras de composicionalidade para o cálculo e a propagação de e-valores (para sentenças complexas a partir de seus constituintes elementares).

6- A lógica possibilística dos e-valores tem a lógica clássica como limite, no caso de valores de suporte Booleanos (0 ou 1, falso ou verdadeiro), vide [2].

Estas propriedades permitem aos e-valores realizar dois feitos maravilhosos:

7- Solucionar o paradoxo da probabilidade zero para hipóteses precisas, e

8- Funcionar como uma ponte, harmonizando probabilidade (a lógica subjacente à inferência estatística e o paradigma de cálculo credal da ciência empírica) e lógica clássica (a regra prototípica de inferência dedutiva em matemática).

O passo 7 representa uma absolvição. Hipóteses precisas são liberadas da síndrome do suporte nulo, e admitidas como cidadãs de primeira classe no espaço das hipóteses. No entanto, o passo 7 não garante que jamais haverá uma hipótese precisa com bom suporte empírico. De fato, considerando o paradoxo da probabilidade zero original, achar uma hipótese assim tão especial deveria ser realmente surpreendente, o equivalente científico de um milagre! Como então deveríamos chamar o fato de mostrar ser possível, algo que é quase certamente (na medida de probabilidade) infactível? No entanto, sabemos que milagres existem sim. (Os descrentes são fortemente encorajados a fazer algumas disciplinas de física experimental, incluindo um bom bocado de trabalho de laboratório.)

No arcabouço Con-Cog, a certificação de hipóteses precisas por e-valores perto da unidade é uma forma forte de verificação, semelhante a uma confirmação empírica ou autenticação pragmática. Em contraste, a corroboração Popperiana é apenas falha em refutar. No entanto, o e-valor não fornece a máquina indutiva para bombeamento de verdades sonhada pela escola empiricista. Há muito mais coisas a se entender sobre ciência como um processo evolutivo que uma passiva espera pelo crescimento vegetativo de teorias verdadeiras a partir de dados bem colhidos, vide [14] e o Cap.4 de [43]. (Na verdade, uma tal máquina poderia tornar-se um grande pesadelo, drenando toda a alma e consciência da atividade de pesquisa e extinguindo o espírito criativo da vida científica.) Assim, sustentamos que o arcabouço Con-Cog segue o caminho certo, encontrando um bem ajustado equilíbrio entre os extremos opostos do excesso, almejado pelo empiricismo, e da escassidade, oferecido pelo falsificacionismo. Assim fazendo, os e-valores do FBST fornecem exatamente a medida certa para verificação de hipóteses, respondendo ao apelo de Imre Lakatos por um 'sopro de indutivismo'.

Desta perspectiva, o arcabouço Con-Cog não apenas redime hipóteses exatas ou precisas da danação estatística, mas as coloca em um lugar de honra na atividade científica, elevando hipóteses precisas a papéis de estrela em qualquer ciência exata. Desta forma, acreditamos que o passo 7 abre caminho para que o arcabouço Con-Cog ofereça importantes insights sobre a natureza das ciências empíricas, insights que podem penetrar muito mais fundo que as alternativas oferecidas pelos arcabouços epistemológicos tradicionais.

5. Verdade na Linguagem Matemática

Matemática é a linguagem comum usada para a expressão e manipulação de entidade simbólicas associadas às quantidades de interesse pertinentes ao escopo de cada particular ciência empírica. Portanto, estamos particularmente interessados na natureza da linguagem matemática. Nesta seção argumentaremos que, no arcabouço Con-Cog, matemática pode ser vista como uma ciência quasi-empírica, uma idéia desenvolvida pelo filósofo Imre Lakatos. A chave de nossa argumentação está no passo 8 da seção 4. O passo 8 constitui uma ponte da física para a matemática, da ciência empírica para quasi-empírica. Desta perspectiva, matemática é vista como um mundo idealizado de teorias absolutamente verificadas populadas por hipóteses com suporte pleno (ou nulo).

5.1 Verdade por Correspondência vs. por Construção

Para apreciar plenamente as conseqüências da perspectiva Con-Cog de objetos e sua representação em linguagem, começaremos por contrastá-la com abordagens mais tradicionais, baseadas em cortes dicotômicos e subseqüentes correspondências. Estas abordagens começam por estabelecer uma distinção que corta o mundo em dois, e então escolhem ou decidem se objetos devem ser corretamente colocados do lado de cá ou do lado de lá: São objetos conceitos internos em dado sistema ou são eles entidades externas que estão no ambiente? Pertencem eles ao mundo 'de cima', subjetivo, da mente, do espírito, do pensamento intuitivo, etc., ou pertencem eles ao mundo 'de baixo', objetivo, do corpo, da matéria, da realidade, etc.?

Um corte primordial rachando o mundo em duas metades sugere também duas maneiras naturais de escalar a montanha epistemológica: Ou as idéias corretas no mundo de cima são aquelas que correspondem à realidade 'objetiva' lá embaixo, ou as coisas corretas no mundo de baixo são aquelas que correspondem às 'boas' idéias lá em cima, etc. O princípio de existência de uma correspondência verdadeira e estática é um pré-requisito necessário, mas há diversas maneiras de estabelecer a conexão, ou de aprendê-la (ou de lembrá-la). O empiricista observa diligentemente o mundo, esperando que sua recompensa seja paga em conhecimento científico corrente que possa, por sua vez, ser utilizado para pagar por ferramentas convenientes a serem utilizadas em empreitadas tecnológicas. O idealista dogmático trabalha duro com sua doutrina nos campos da metafísica, de modo a assegurar um bom lugar lá no topo, esperando assim usufruir de uma viagem tranqüila deslizando morro abaixo o caminho epistemológico. A abordagem da correspondência didática é simples e robusta. Ela pode ser facilmente adaptada a muitas situações e propósitos diferentes. Ela também tem qualidades didáticas atraentes, sendo fácil de entender e ensinar. A abordagem da correspondência didática exige pouco investimento inicial e tem baixo custo de manutenção, contanto que se entenda que o pressuposto de uma correspondência pré-determinada torna todo o sistema essencialmente estático. Sua maior fraqueza reside em sua rigidez. Não é fácil considerar novas hipóteses ou conceitos originais, e mais difícil ainda manejar a refutação ou o descrédito de hipóteses ou conceitos previamente aceitos. Uma nova ordem mundial sempre tem de ser, ao menos em princípio, construída a partir do chão.

No Construtivismo Cognitivo, linguagem pode ser vista como um terceiro pólo no arcabouço epistemológico, um terceiro elemento que faz o papel de buffer, moderando ou mitigando a interação de sistema e ambiente, a relação entre teoria e experimento, etc. Ademais, apenas dentro de uma linguagem é que podemos enunciar sentenças, que podem então ser julgadas por sua veracidade ou falsidade. Mais ainda, a linguagem nos fornece uma prateleira para colocarmos nossos objetos (ou nossas representações dos mesmos) um armário para guardarmos estes tokens simbólicos. Mesmo que a noção de correspondência dos objetos - quer a conceitos puramente internos de um dado sistema, quer a entidades estritamente externas no ambiente - seja inconsistente com o arcabouço Con-Cog, este arcabouço é perfeitamente compatível com ter objetos re-presentados como símbolos em uma ou várias linguagens. Esta visão é muito conveniente e pode ser muito útil, contanto que não passemos a ter atitudes extravagantes, atribuindo às linguagens poderes mágicos capazes de criar ex-nihilo o mundo em que vivemos. Embora esta atitude pareça uma tolice, este tipo de erro foi cometido por alguns filósofos do movimento construtivista radical, vide Stern (2005).

A abordagem Con-Cog requer, desde o início, uma construção mais sofisticada, mas o esforço adicional deve ser compensado pela vantagem desta ser mais resiliente. Uma de nossas metas é escapar dos dilemas inerentes às abordagens de correspondência pré-determinada, permitindo maior flexibilidade, fornecendo força estrutural e estabilidade dinâmica. Desta forma, encontrar auto-soluções melhores (mais precisas, estáveis, fáceis de compor ou válidas em casos mais gerais) ou melhores representações para objetos de uma dada realidade, não implica automaticamente que as formas antigas sejam obliteradas. Conceitos ou noções antigas podem ser substituídas por formas melhores sem que sejam categoricamente desacreditadas. Portanto, teorias têm mais espaço para continuamente crescer e se adaptar, enquanto conceito a um tempo abandonados podem ser facilmente reciclados se seu reuso mostra-se conveniente em uma posterior oportunidade. Desta forma, o arcabouço epistemológico Con-Cog naturalmente acomoda conceitos dinâmicos, mudanças de hipóteses e a evolução de teorias, todas tão características da ciência moderna.

5.2. Ontologias Quasi-Empíricas

Ontologias são linguagens controladas usadas para a prática da ciência. Elas são desenvolvidas como ferramentas para comunicação científica. Esta comunicação tem aspectos típicos internos e externos: Precisamos de linguagens para nos comunicar com os outros e com nós mesmos. Utilizamos linguagens como ferramentas para coordenação eficaz de ações e como ferramenta para estruturação eficiente do entendimento. Equipados com ontologias apropriadas, espera-se que os cientistas construam modelos capazes de fornecer predições confiáveis e explicações intuitivas. Finalmente, ao menos no domínio das ciências exatas, requer-se destes modelos que tenham uma natureza formal e quantitativa. Portanto, a abordagem que estamos seguindo naturalmente enfatiza o papel especial desempenhado pelas linguagens formais ou matemáticas, nosso principal interesse nesta seção.

Matemática formal ou abstrata, incluindo vários dialetos populares menos formais, é a linguagem comum utilizada para a expressão e manipulação de entidades simbólicas associadas com as quantidades de interesse pertinentes ao escopo de cada particular ciência empírica. Portanto, estamos particularmente interessados na natureza da linguagem matemática. De fato, argumentamos que a matemática deve ser vista como uma ontologia para uma classe de conceitos relevantes a todas as ciências exatas, a saber, os conceitos relacionados às idéias intuitivas de contagem, simetria, número, infinito, medida, dimensão e continuidade. Deste ponto de vista, a matemática pode ser vista como uma ciência quasi-empírica, em oposição a uma ciência Euclidiana, de acordo com a clássica distinção definida pelo filósofo Imre Lakatos na p.40,V.2 de [20].

"Se um sistema dedutivo é Euclidiano ou quasi-empírico é decidido pelo padrão de fluxo de valores verdade no sistema.

O sistema é Euclidiano se o fluxo característico é a transmissão da verdade de forma 'descendente', a partir de um conjunto de axiomas para o resto do sistema - lógica é o instrumento de prova; O sistema é quasi-empírico se o fluxo característico é 'ascendente', rumo às 'hipóteses' - lógica é um instrumento de crítica. De forma ainda mais geral, podemos falar de teorias empíricas ou quasi-empíricas independentemente daquilo que flui nos canais lógicos: Verdades ou falsidades certas ou falíveis, probabilidade ou improbabilidade, desejabilidade ou indesejabilidade moral, etc. O decisivo é como o fluxo se faz."

Obviamente, no Con-Cog, é a verificação (ou não) de teorias medido por e-valores do FBST que flui de forma ascendente rumo às hipóteses, como discutido nas seções anteriores do artigo. Neste ponto, podemos ver como o arcabouço Con-Cog pode levar a uma renovada apreciação e entendimento do famoso par de sentenças gêmeas devidas a Albert Einstein, na p.28 de [7], e Imre Lakatos, na p.102 de [19]:

"Enquanto as afirmações da matemática se refiram a verdades reais, elas não são certas; e enquanto forem certas, elas não se referem a verdades reais". "Kappa: *Se quiseres que a matemática tenha significado, tens que renunciar à certeza. Se quiseres a certeza, livra-te do significado. Não podes ter ambos."*

5.3. Deduções Formais vs. Demonstrações Explicativas

Das considerações feitas na última subseção, poderíamos esperar que os matemáticos se sentissem muito à vontade no laboratório de física. No entanto, sabemos que os matemáticos de hoje em dia não costumam se aventurar no laboratório de física para encontrar suas conjecturas ou provar seus teoremas. Todavia, hoje em dia, é cada vez mais freqüente a utilização de experimentos computacionais, como a geração aleatória ou determinística de instâncias ou cenários para checar se uma conjectura se sustenta, e tentar corrigí-la caso ela se mostre falha, antes de concentrar maiores esforços para fornecer uma demonstração formal.

Quanto ao trabalho profissional de laboratório, a ciência moderna parece preferir uma abordagem de linha de produção, favorecendo a divisão de trabalho e a especialização. Cientistas experimentais e engenheiros geram os dados experimentais, e podem ainda formular leis empíricas ou algoritmos heurísticos para manejar estas fórmulas. Mais tarde, cientistas teóricos refinam estas fórmulas e heurísticas, e explicam suas propriedades inserindo-as em um contexto mais amplo. Por exemplo, fórmulas empíricas simples ou sistemas teóricos completos podem ser justificados por derivação a partir de princípios metafísicos gerais, isto é, neste contexto, princípios metafísicos fornecem respostas racionais a questões que indagam 'porque' uma teoria de nível mais baixo é ou pode ser verdadeira, vide Stern (2008, cap.4).

Finalmente, matemáticos dão um polimento final à teoria e, caso necessário, fornecem novos embasamentos formais para impor padrões mais rigorosos. Esta divisão de trabalho entre comunidades distintas pode fazer um uso mais eficiente de recursos e habilidades escassas e, assim procedendo, ser benéfica ao desenvolvimento da ciência, acelerando fortemente o seu progresso. Todavia, o próprio processo de especialização pode dar a falsa impressão de que todas estas áreas e atividades inter-relacionadas não são apenas diferenciadas, mas (quase) independentes. Esta atitude geral é por vezes refletida em uma mudança de estilo na maneira em que textos de matemática são escritos. Em um primeiro momento, demonstrações matemáticas são desenvolvidas como técnicas de visualização ou intuitivos *gedanken-experimente*. Procurando uma maior generalidade, os argumentos são apresentados de forma cada vez mais abstrata. Esta é a mudança de demonstrações explicativas ou geométricas para deduções formais, lógicas ou aritméticas.

5.3.1. Por que a Matemática Tornou-se uma Ciência Dedutiva?

A visão de Lakatos da matemática como ciência quasi-empírica, embora não seja incomum, não é a opinião corrente mais difundida. Ao revés, desde os tempos da compilação dos Elementos de Geometria, a matemática é vista como uma ciência Euclidiana. Todavia, esta mudança de percepção sobre a natureza da matemática corresponde a um processo histórico longo e interessante. Àrpàd Szabò, o professor de Imre Lakatos na Hungria, estudou muito a fundo a história desta transformação no início da matemática Grega, vide Szabó (1978).

De acordo com Szabó, este processo histórico pode ser traçado, entre outras coisas, pela transformação de algumas palavras técnicas e termos especializados usados em textos de matemática. Por exemplo, o significado original de δειξαι, era simplesmente o de mostrar ou pôr em evidência. Mais tarde, a mesma palavra tornou-se um termo técnico na matemática Grega, como na expressão - *οπερ* εδει δειξαι, nosso familiar *quod erat demonstrandum*, vide p.188 em [45]. Este uso posterior corresponde a uma abstração ou aritmetização do ideal de demonstração matemática, que move-se para longe das metas de visualização geométrica e explicação intuitiva. A este respeito, Sócrates, como citado na República de Platão na p.194,197 de [45], declara: "Os assuntos da aritmética jazem no domínio do puro pensamento." Também a palavra axioma, αξιουν - ser digno ou valoroso, originariamente denotava a proposição (ex)posta à discussão crítica ou dialética. vide p.49 em [19] e p.65-84 em [45]. Ironicamente, mais tarde, a mesma palavra é usada para indicar uma afirmação óbvia ou auto-evidente.

Os métodos historiográficos empregados por Szabó não são imunes à crítica. Todavia, após ler sua obra prima, [45], pode-se dizer - *Si non è vero, è ben trovato.* Seguindo os argumentos de Szabó, pode-se encontrar uma resposta possível à questão que ele indaga, a saber, - *Como foi que a matemática tornou-se uma ciência dedutiva?* Todavia, nesta seção estamos interessados em uma outra questão intimamente relacionada, não *como* mas *por quê*, - *Por que a matemática tornou-se uma ciência dedutiva?* Por que foi sequer possível esta transformação, de ciência de pés no chão para a etérea filosofia?

Mais uma vez, a natureza maravilhosa ou milagrosa de uma hipótese precisa bem suportada, como discutido na seção anterior, pode explicar a tendência das mudanças em percepção e alterações de significado estudados por Szabó. Afinal de contas, é apenas natural esperar que teoremas miraculosos sejam filhos do céu. Não me aventurarei a discutir se bons axiomas vem ou não do céu, ou se eles vem 'diretamente dO Livro', como dizia o matemático Pál Erdős. Irei apenas celebrar a revelação deste mistério. Ele representa a última transmutação do PPZ, de má sina de dúvida e confusão, para bom augúrio de conhecimento universal.

6. Pesquisa Futura e Comentários Finais

A história da matemática fornece muitos temas de estudo interessantes que pretendemos explorar em artigos futuros. Por exemplo, algumas abordagens modernas à lógica e teoria dos conjuntos parecem ter seguido tendências que convergem com a perspectiva Con-Cog. Por exemplo, na p.27,V.2 de [20], Gödel afirma:

"O papel das assim chamadas 'fundações' é comparável à função exercida na física teórica por hipóteses explicativas... a real função dos axiomas é a de explicar os fenômenos descritos pelos teoremas do sistema, ao invés de tentar fornecer uma genuína 'fundação' para os mesmos teoremas."

Eugen Wigner e Richard Hamming, [12, 47], ficam assombrados com a "desarrazoada eficácia da matemática nas ciências naturais". Examinando este mistério da perspectiva Con-Cog, entendemos que não há nada mais natural que a eficácia da matemática nas ciências naturais, pois a matemática nada mais é que a ordem natural do mundo (incluindo nos mesmos) expressa em linguagem (tão bem como ora podemos fazê-lo). Obviamente, um mistério mais profundo permanece intocado, a saber, a existência de um cosmos ordenado, e não apenas caos. Na verdade, não apenas a existência de qualquer cosmos, mas a existência de um que seja 'bom', no qual podemos encontrar auto-soluções precisamente definidas, estáveis, separáveis e componíveis, de modo que possam ser utilizados como blocos ou módulos na construção do conhecimento. No entanto, considero que mesmo esta pequena mudança de perspectiva já é, em si mesma, uma bela façanha do arcabouço epistemológico do Construtivismo Cognitivo.

Agradecimentos: O autor é grato pelo suporte recebido do Departamento de Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, FAPESP -

Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, e CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (PQ-306318-2008-3). O autor também é grato pelo auxílio e pelas discussões com vários de seus colegas de trabalho, incluindo, Carlos Alberto de Bragança Pereira, Luis Esteves, Marcelo de Souza Lauretto, Rafael Bassi Stern, Sergio Wechsler and Wagner Borges. O autor é especialmente grato pelos comentários de Gábor Kutrovátz da Universidade Loránd Eötvös de Budapest referentes aos trabalhos tardios de Imre Lakatos.

7. Referências Bibliográficas

[1] Basu,D. Statistical Information and Likelihood. Edited by J.K.Ghosh. *Lect. Notes in Statistics, 1988, 45.*

[2] Borges,W.; Stern,J.M. The Rules of Logic Composition for the Bayesian Epistemic e-Values. *Logic Journal of the IGPL, 2007, 15, 5-6,* 401-420.

[3] DeGroot,M.H. *Optimal Statistical Decisions*. McGraw-Hill: NY, *1970.*

[4] Darwiche,A.Y. *A Symbolic Generalization of Probability Theory*. Ph.D. Thesis, Stanford Univ. *1993.*

[5] Dubins,L.E.; Savage,L.J. *How to Gamble If You Must. Inequalities for Stochastic Processes*. NY: McGraw-Hill. *1965.*

[6] Eells,E.; Fitelson,B. Measuring Confirmation and Evidence. *The Journal of Philosophy. 2000, 97,12, 663-672.*

[7] Einstein,A. Geometrie und Erfahrung. Springer. *1921,*

www.alberteinstein.infoPDFsCP7Doc52_pp382-388_403.pdf.

Transl.in Einstein,A. *Ideas and Opinions*. Wings Books. *1954.*

[8] Finetti,B.de. *Probability, Induction and Statistics*. NY: Wiley. *1972.*

[9] Finetti,B.de. *Theory of Probability*, V1 and V2. London: Wiley. *1974.*

[10] Foerster, H.von. *Understanding Understanding: Essays on Cybernetics and Cognition.* Springer Verlag: NY, *2003.*

[11] Gelman,A.; Carlin,J.B.; Stern,H.S.; RubinD.B. *Bayesian Data Analysis*, 2nd ed. Chapman and Hall / CRC: NY, *2003.*

[12] Hamming,R.W. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics. *The American Mathematical Monthly, 1980, 87, 2.*

[13] Hawthorne,J. Confirmation Theory. To be published at P.S.Bandyopadhyay, M.R.Forster, vol.eds. D.M.Gabbay, P.Thagard, J.Woods, gen.eds. Handbook of the Philosophy of Science. Volume 7: Philosophy of Statistics. Elsevier BV. *2010.*

[14] Hilts,V. *Aliis exterendum*, or the Origins of the Statistical Society of London. *Isis, 1978, 69,1,21-43.*

[15] Huber,F. Confirmation and Induction *The Internet Encyclopedia of Philosophy. 2010,*

www.iep.utm.edu/conf-ind/

[16] Inhasz,R.; Stern,J.M. Emergent Semiotics in Genetic Programming and the Self-Adaptive Semantic Crossover. p.381-392 in L. Magnani W.Carnielli (eds.) *Model-Based Reasoning in Science & Technology.* SCI 314, Berlin: Springer. *2010.*

[17] Krohn,W.; Küppers,G. The Selforganization of Science - Outline of a Theoretical Model. p.208–222 in Krohn,W. Küppers,G.; Nowotny,H. *Selforganization. Portrait of a Scientific Revolution.* Dordrecht: Kluwer. *1990.*

[18] Kuipers,T.A.F. Inductive Probability and the Paradox of Ideal Confirmation. *Philosophica, 1971, 17, 1, 197-205.*

[19] Lakatos,I.; Worall,J.; Zahar,E. (eds). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge University Press. *1976.*

[20] Lakatos,I. *Philosophical Papers. V.1 - The Methodology of Scientific Research Programmes. V.2. - Mathematics, Science and Epistemology.* Cambridge: Cambridge University Press. *1978.*

[21] Lauretto, M.; Pereira,C.A.B.; Stern,J.M.; Zacks,S. Full Bayesian Significance Test Applied to Multivariate Normal Structure Models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics, 2003, 17, 147-168.*

[22] Luhmann,N. *Ecological Communication.* Chicago Univ. Press. *1989.*

[23] Madruga,M.R.; Esteves,L.G.; Wechsler,S. On the Bayesianity of Pereira-Stern Tests. *Test, 2001, 10, 291–299.*

[24] Maher,P. Confirmation Theory. in D.M.Borchert ed. The Encyclopedia of Philosophy 2nd ed. Macmillan. *2005.*

[25] Maturana, H.R.; Varela,F.J. *Autopoiesis and Cognition. The Realization of the Living.* Dordrecht: Reidel. *1980.*

[26] Pawitan,Y. *In All Likelihood: Statistical Modelling and Inference Using Likelihood.* Oxford University Press. *2001.*

[27] Peirce,Ch.S. Questions Concerning Certain Faculties Claimed for Man. *J.of Speculative Philosophy, 1868, 2,103-114.*

[28] Peirce,Ch.S. A Theory of Probable Inference. *The Johns Hopkins Studies in Logic, 1883, 126-181.*

[29] Pereira,C.A.B.; Wechsler,S. On the Concept of *p*-value. *Brazilian Journal of Probability and Statistics, 1993, 7, 159–177.*

[30] Pereira,C.A.B.; Stern,J.M. Evidence and Credibility: Full Bayesian Significance Test for Precise Hypotheses. *Entropy Journal, 1999, 1,* 69-80.

[31] Pereira,C.A.B.; Wechsler,S.; Stern,J.M. Can a Significance Test be Genuinely Bayesian? *Bayesian Analysis, 2008 3, 1,* 79-100.

[32] Pereira,C.A.B.; Stern,J.M. (2008b). Special Characterizations of Standard Discrete Models. *REVSTAT Statistical Journal, 2008, 6, 3, 199-230.*

[33] Pickett Inc. N525 Stat-Rule, A Multi-Purpose Sliderule for General and Statistical Use (Instruction manual). Santa Barbara, CA, USA. *1965.*

[34] Rouanet,H.; Bernard,J.M.; Bert,M.C.; Lecoutre,B.; Lecoutre,M.P,; Roux,B.Le. *New Ways in Statistical Methodology. From Significance Tests to Bayesian Inference.* Berne: Peter Lang. *1998.*

[35] Savage,L.J. *The Foundations of Statistics.* NY: Dover. *1972.*

[36] Schilpp,P.A. *The Philosophy of Karl Popper.* La Salle: Open Court. *1974.*

[37] Segal,L. *The Dream of Reality. Heintz von Foerster's Constructivism.* NY: Springer. *2001.*

[38] Stern,J.M. Significance Tests, Belief Calculi, and Burden of Proof in Legal and Scientific Discourse. Laptec-2003, *Frontiers in Artificial Intelligence and its Applications, 2003, 101, 139–147.*

[39] Stern,J.M. Paraconsistent Sensitivity Analysis for Bayesian Significance Tests. SBIA'04, *Lecture Notes Artificial Intelligence, 2004, 3171, 134–143.*

[40] Stern,J.M. Cognitive Constructivism, Eigen-Solutions, and Sharp Statistical Hypotheses. *Cybernetics and Human Knowing, 2007, 14, 1,* 9-36.

[41] Stern,J.M. Language and the Self-Reference Paradox. *Cybernetics and Human Knowing*, 2007, 14, 4, 71-92.

[42] Stern,J.M. Decoupling, Sparsity, Randomization, and Objective Bayesian Inference. *Cybernetics and Human Knowing, 2008, 15, 2,* 49-68.

[43] Stern,J.M. *Cognitive Constructivism and the Epistemic Significance of Sharp Statistical Hypotheses.* Tutorial book for MaxEnt 2008, The 28th International Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering. Boracéia, São Paulo, Brazil. *2008.*

[44] Strevens,M. Notes on Bayesian Confirmation Theory. *2006.* Retrieved at 11-11-2010 from www.nyu.edu/gsas/dept/philo/user/strevens/Classes/Conf06/BCT.pdf

[45] Szabó,A. *The Beginnings of Greek Mathematics*. Budapest, Akadémiai Kiadó. *1978.*

[46] Wechsler,S.; Pereira,C.A.B.; Marques,P.C. Birnbaum's Theorem Redux. *AIP Conference Proceedings, 2008, 1073, 96-100.*

[47] Wigner,E. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics, 1960.*

[48] Williams,D. *Weighing the Odds.* Cambridge Univ. Press. *2001.*

[49] M.Zelleny,M. *Autopoiesis, Dissipative Structures, and Spontaneous Social Orders.* Washington: AAAS - American Association for the Advancement of Science. *1980.*

[50] Zellner,A. *Introduction to Bayesian Inference in Econometrics.* Wiley: NY, *1971.*

Julio Michael Stern, *www.ime.usp.br/~jstern*, é Bacharel e Mestre pelo Instituto de Física da Universidade de São Paulo, M.Eng. e Ph.D. pela School of Operations Research and Industrial Engineering of Cornell University (Ithaca, NY, USA), Livre Docente pelo Departamento de Ciência da Computação, Professor Titular do Departamento de Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, e Consultor e Pesquisador nível 1 do CNPq na área de Pesquisa Operacional. Suas áreas de interesse incluem: Algoritmos estocásticos e evolutivos; Estatística Bayesiana; Inferência lógica e epistemologia; Métodos esparsos e estruturados; Otimização numérica e Pesquisa operacional.

Este livro foi confeccionado pelo Grupo de Lógica e Teoria da Ciência em comemoração aos Vinte e Cinco anos de existência do Instituto de Estudos Avançados da USP.

A Lógica experimentou avanços jamais vistos nos último e penúltimo séculos. Digno de menção é o aparecimento de novas categorias de lógicas. Uma delas, a lógica paraconsistente, vem chamando a atenção de estudiosos por tratar contradições em seu interior sem o perigo de trivialização. Um de seus descobridores é um lógico brasileiro: Newton C. A. da Costa.

Além da compreensão de seus fundamentos, paulatinamente diversas aplicações foram sendo obtidas nos mais diversos setores do conhecimento humano, da Filosofia a Inteligência Artificial e Automação, quebrando um paradigma do pensamento humano de mais de dois mil anos.

Grande parte das pesquisas das lógicas paraconsistentes contou com o apoio do Instituto de Estudos Avançados. Muitas frases podem refletir essa situação, como a de Shakespeare: "entre o céu e a terra existem muito mais coisas do que sonha sua vã filosofia".