MAT0231 - Álgebra II para Licenciatura

Prova P1

1.- Quais dos seguintes anéis são domínios de integridade? **(1.5 pontos)**

(a) $\mathbb{Z}_{777}$
(b) $A \times B$ onde A e B são domínios de integridade
(c) $M_3(\mathbb{R})$
(d) A/I, onde A é um anel comutativo com elemento unidade e I é um ideal maximal de A

Resposta.

(a) Não é domínio de integridade porque sabemos que, para todo inteiro positivo n, $\mathbb{Z}_n$ é um domínio se, e somente se, n for um número primo. No nosso caso 777 não é primo.
Se não se lembrar do teorema, veja que, por exemplo, $\overline{7} \cdot \overline{111} = \overline{0}$.
(b) Não é um domínio pois, por exemplo, $(1,0) \cdot (0,1) = (0,0)$.
(c) Não é um domínio pois, por exemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(d) Sabemos que quando A é um anel comutativo com elemento unidade e I é um ideal maximal de A, então A/I é um corpo (de fato é equivalente) e, portanto, um domínio de integridade.

2.- Quais dos seguintes anéis são corpos? **(1.5 pontos)**

(a) $\mathbb{Z}_{37}$
(b) $A \times B$ onde A e B são corpos
(c) $M_3(\mathbb{R})$
(d) A/I, onde A é um anel comutativo com elemento unidade e I é um ideal maximal de A

Resposta.

(a) É um corpo, pois 37 é um número primo. Estudamos que para todo inteiro positivo n, $\mathbb{Z}_n$ é um corpo se, e somente se, n é primo.
(b) Não é um domínio pois, por exemplo, $(1,0) \cdot (0,1) = (0,0)$.
(c) Não é um domínio pois, por exemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(d) Sabemos que quando A é um anel comutativo com elemento unidade e I é um ideal maximal de A, então A/I é um corpo (de fato é equivalente) .

3.- Seja A um anel. Suponha que I e J são ideais de A.

(a) Mostre que $I+J = \{y+z \in A\colon y \in I,\ z \in J\}$ é um ideal de A. **(1 ponto)**
(b) Mostre que $I \cap J$ é um ideal de A. **(1 ponto)**
(c) Sejam m, n inteiros positivos com $\mathrm{mdc}(m,n) = d$. Mostre que $m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. **(1 ponto)**
(d) Sejam m, n inteiros positivos com $\mathrm{mmc}(m,n) = r$. Mostre que $m\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z} = r\mathbb{Z}$. **(1 ponto)**

Resposta.

(a) $0 \in I + J$ pois como $0 \in I$, $0 \in J$, então, $0 = 0 + 0 \in I + J$.
Se $y, y' \in I$ e $z, z' \in J$, temos que $(y+z)-(y'+z') = (y-y')+(z-z') \in I+J$ pois $y-y' \in I$ e $z - z' \in J$.
Se $y \in I$, $z \in J$ e $a \in A$, então $a(x + y) = ax + ay \in I + J$, pois $ax \in I$ e $ay \in J$. Também $(x + y)a = xa + ya \in I + J$ pois $xa \in I$ e $ya \in J$.
(b) Como $0 \in I$ e $0 \in J$, temos que $0 \in I \cap J$.
Se $u, v \in I \cap J$, temos que $u, v \in I$ e $u, v \in J$, logo $u - v \in I$ e $u - v \in J$ pois I e J são ideais. Logo $u - v \in I \cap J$.
Se $u \in I \cap J$ e $a \in A$, temos que $u \in I$ e $u \in J$. Agora como I é ideal temos que $au, ua \in I$, e J é ideal temos que $au, ua \in J$. Logo $au, ua \in I \cap J$.

(c) Observa que, como $d|m$ e $d|n$, então $m\mathbb{Z} \subseteq d\mathbb{Z}$ e $n\mathbb{Z} \subseteq d\mathbb{Z}$. Portanto $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} \subseteq d\mathbb{Z}$, já que $d\mathbb{Z}$ é ideal. De outra forma, para todos $x, y \in \mathbb{Z}$, existem $m', n' \in \mathbb{Z}$ tais que $mx + ny = dm'x + dn'y = d(m'x + n'y) \in d\mathbb{Z}$.
Pela igualdade de Bezout temos que existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $ma+nb = d$. Logo $d \in m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}$, e como $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ é um ideal temos que $d\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$.
(d) Como $m|r$ e $n|r$, temos que $r\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ e $r\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$. Portanto $r\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$.
Se $x \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ temos que $m|x$ e $n|x$, logo $r|x$. Assim $x \in r\mathbb{Z}$. Logo $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} \subseteq r\mathbb{Z}$.

4.- (a) Sejam A, B anéis e $f : A \to B$ um homomorfismo.
Suponha que S é um subanel de A. Mostre que $h: S \to B$, definido por $h(x) = f(x)$ para todo $x \in S$, é um homomorfismo de anéis. **(0.5 pontos)**
(b) Encontre todos os endomorfismos de $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. **(2 pontos)**

Resposta.
(a) Sejam $x, y \in A$. Então $h(x + y) = f(x + y) = f(x) + f(y) = h(x) + h(y)$, e $h(xy) = f(xy) = f(x)f(y) = h(x)h(y)$. Logo h é um homomorfismo.
(b) Sempre existe o homomorfismo $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i]$, $x \mapsto 0$.
Assim suponha que $f : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i]$ é um homomorfismo diferente do anterior. Em sala de aula estudamos que o único homomorfismo não nulo possível de $\mathbb{Z}$ em um domínio de integridade A é $n \mapsto n1$. Assim, o único homomorfismo $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$ é $n \mapsto n$. Pelo item anterior, temos que $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, $f(a + bi) = a + bf(i)$, para todo $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$.
Como $i^2 = -1$, temos que $-1 = f(-1) = f(i^2) = f(i)^2$, logo $f(i) = \pm i$. Se $f(i) = i$, temos que f é a identidade, que sabemos que é um homomorfismo.
Vejamos que $f(a + bi) = a - bi$ define um endomorfismo de $\mathbb{Z}[i]$. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Assim $f(a+bi+c+di) = f(a+c+(b+d)i) = a+c-(b+d)i = a-bi+c-di = f(a+bi)+f(c+di)$.
Agora $f((a+bi)(c+di)) = f((ac-bd)+(ad+bc)i) = ac-bd-(ad+bc)i = (a-bi)(c-di) = f(a + bi)f(c + di)$.
Resumindo os únicos endomorfismos de $\mathbb{Z}[i]$ são o homomorfismo zero, a identidade e conjugação.

5.- Sejam A,B anéis e $f : A \to B$ um homomorfismo. Suponha que I é um ideal de A contido em $\operatorname{Ker} f$. Considere a projeção natural $\pi: A \to A/I$, $x \mapsto \overline{x}$. **(4 pontos)**
(a) Mostre que existe um único homomorfismo $g : A/I \to B$ tal que $f = g \circ \pi$.
(b) Encontre $\operatorname{Ker} g$, $\operatorname{Im} g$.
(c) Qual a relação entre I e $\operatorname{Ker} f$ para que g seja um homomorfismo injetor?

Resposta.
(a) Como queremos que $f = g \circ \pi$, temos que a única opção é definir $g(\overline{x}) = f(x)$.
Vejamos que está bem definido. Se $\overline{x} = \overline{y}$, temos que $x - y \in I \subseteq \operatorname{Ker} f$. Logo $0 = f(x - y) = f(x) - f(y)$. Portanto $f(x) = f(y)$.
Vejamos que g é homomorfismo. Sejam $x, z \in A$. Então $g(\overline{x} + \overline{z}) = g(\overline{x + z}) = f(x + y) = f(x) + f(y) = g(\overline{x}) + g(\overline{y})$ e $g(\overline{x} \cdot \overline{z}) = g(\overline{xz}) = f(xz) = f(x)f(z) = g(\overline{x})g(\overline{z})$.
(b) $\operatorname{Ker} g = \{\overline{x} \in A/I : g(\overline{x}) = 0\} = \{\overline{x} \in A/I : f(x) = 0\} = \{\overline{x} \in A/I : x \in \operatorname{Ker} f\}$.
$\operatorname{Im} g = \{g(\overline{x}) : \overline{x} \in A/I\} = \{g(\overline{x}) : x \in A\} = \{f(x) : x \in A\} = \operatorname{Im} f$.
(c) g é injetor se, e somente se, $\operatorname{Ker} g = \{\overline{x} \in A/I : x \in \operatorname{Ker} f\} = \{\overline{0}\}$. Se $I \neq \operatorname{Ker} f$, existiria $w \in \operatorname{Ker} f \setminus I$, e portanto $\overline{w} \in \operatorname{Ker} g$ e $\overline{w} \neq 0$. Ou seja teríamos mais do que uma classe no núcleo. Assim a condição para ser injetor é que $I = \operatorname{Ker} f$.

6.- Sejam m e n inteiros positivos tais que $\mathrm{mdc}(m,n)=1$. **(4 pontos)**

(a) Mostre que a função $\varphi\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$, definida por $\varphi(x)=(\overline{x},\overline{x})$ para todo $x\in\mathbb{Z}$, é um homomorfismo.

(b) Mostre que $\mathrm{Ker}\,\varphi = mn\mathbb{Z}$.

(c) Mostre que $(\overline{1},\overline{0})$, $(\overline{0},\overline{1})\in\mathrm{Im}\,\varphi$ (*Indicação:* Identidade de Bezout). Deduza que φ é sobrejetor.

(d) Mostre que $\mathbb{Z}_{mn}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$.

Resposta.

(a) Para todos $x,y\in\mathbb{Z}$,

$$\varphi(x+y)=(\overline{x+y},\overline{x+y})=(\overline{x}+\overline{y},\overline{x}+\overline{y})=(\overline{x},\overline{x})+(\overline{y},\overline{y})=\varphi(x)+\varphi(y).$$

$$\varphi(xy)=(\overline{xy},\overline{xy})=(\overline{x}\cdot\overline{y},\overline{x}\cdot\overline{y})=(\overline{x},\overline{x})\cdot(\overline{y},\overline{y})=\varphi(x)\varphi(y).$$

(b) Se $x\in mn\mathbb{Z}$ então $x=mnz$ para algum $z\in\mathbb{Z}$, logo $\varphi(x)=(\overline{x},\overline{x})=(\overline{mnx},\overline{mnz})=(\overline{0},\overline{0})$. Suponha que $x\in\mathrm{Ker}\,\varphi$. Então $\varphi(x)=(\overline{x}.\overline{x})=(\overline{0},\overline{0})$. Isso implica que $\overline{x}=\overline{0}\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, ou seja, $m|x$. Também implica que $\overline{x}=\overline{0}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ou seja, $n|x$. Como $\mathrm{mdc}(m,n)=1$, temos que $(mn)|x$. Ou seja, $x\in mn\mathbb{Z}$.

(c) Pela identidade de Bezout, existem $a,b\in\mathbb{Z}$ tais que $ma+nb=1$. Observa que $ma=1-nb$ e $nb=1-ma$. Assim $\varphi(ma)=(\overline{ma},\overline{ma})=(\overline{0},\overline{1-nb})=(\overline{0},\overline{1}-\overline{nb})=(\overline{0},\overline{1})$. Também $\varphi(nb)=(\overline{nb},\overline{nb})=(\overline{1-ma},\overline{0})=(\overline{1},\overline{0})$.
Sejam $u,v\in\mathbb{Z}$. Vejamos que $(\overline{u},\overline{v})\in\mathrm{Im}\,\varphi$.

$$\varphi(u(nb)+v(ma))=\varphi(u(nb))+\varphi(v(ma))=\varphi(u)\varphi(nb)+\varphi(v)\varphi(ma)=(\overline{u},\overline{u})(\overline{1},\overline{0})+(\overline{v},\overline{v})(\overline{0},\overline{1})=(\overline{u},\overline{v}).$$

(d) Como φ é sobrejetor temos que $\mathrm{Im}\,\varphi=\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$. Também sabemos que $\mathrm{Ker}\,\varphi=mn\mathbb{Z}$. Pelo estudado em teoria temos que os anéis $\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\,\varphi$ e $\mathrm{Im}\,\varphi$ são isomorfos. Logo $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ são isomorfos. Agora usamos que $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_{mn}$.